풀이

STEP I 1991, 문제 4

순수수학 • 기하에서의 최적화

> **STEP I 1991, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q4

핵심 아이디어

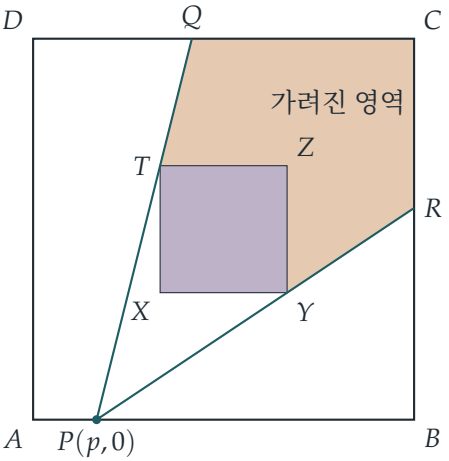
경비병은 탑 뒤에 가려진 점을 제외한 안뜰의 모든 점을 볼 수 있다. 그러므로 힌트에 따라 그의 위치 $P = (p, 0)$에서 본 탑의 "그림자" 넓이를 구한다. 그림자는 P에서 나와 탑을 아슬아슬하게 스치는 두 반직선으로 둘러싸인다. 이 반직선들이 벽과 만나는 점을 찾고, 그림자의 넓이를 다각형(polygon)의 넓이로 계산하면, 문제는 $[0, 4]$에서 일변수 함수를 최대화하는 문제가 된다. 끝점(endpoint)을 확인하는 것을 잊지 말자.

풀이

설정하기

안뜰은 큰 정사각형에서 탑을 뺀 부분이고, 넓이는 $144 - 16 = 128$이다. 경비병이 $0 \le p \le 4$인 $P = (p, 0)$에 있다고 하고, 그가 볼 **수 없는** 넓이를 $H(p)$라 하자. 보이는 넓이는 $128 - H(p)$이므로, 보이는 넓이는 H가 가장 클 때 가장 작고, 그 반대도 성립한다.

$p \le 4$이므로 P는 직선 $y = 4$의 아래쪽에, 그리고 직선 $x = 4$의 왼쪽(또는 그 위)에 있다. 따라서 P에서 보면 탑은 아랫면 XY와 왼쪽 면 XT를 드러내고, 그 윤곽은 꼭짓점 $T(4, 8)$과 $Y(8, 4)$로 정해진다. 꼭짓점 $Z(8, 8)$은 각 TPY 안에 있어 가려진다. 가려진 영역은 반직선 PT와 PY 사이에서 경로 $T \to Z \to Y$ 너머에 있다.



스치는 반직선이 벽과 만나는 점

P에서 $T(4,8)$을 지나는 반직선은 가로로 $4-p$만큼 갈 때마다 8만큼 올라가므로, $y=12$에 도달하는 점은

$$x = p + \tfrac{12}{8}(4-p) = 6 - \tfrac{p}{2}, \qquad \text{따라서} Q = \left(6-\tfrac{p}{2},\ 12\right).$$

$4 \le 6 - \frac{p}{2} \le 6$이므로 이 점은 실제로 위쪽 벽 DC 위에 있다.

P에서 $Y(8,4)$를 지나는 반직선은 가로로 $8-p$만큼 갈 때마다 4만큼 올라가므로, $x=12$에 도달하는 점은

$$y = \frac{4(12-p)}{8-p}, \qquad \text{따라서} R = \left(12,\ \frac{4(12-p)}{8-p}\right).$$

이 값은 p가 0에서 4로 갈 때 6에서 8로 증가하므로, R은 오른쪽 벽 BC 위에 있다.

가려진 넓이

가려진 영역은 다각형 $TQCRYZ$이다. 그 넓이는 다음과 같이 구하는 것이 가장 쉽다.

$$H = [PRCQ] - [PYZT],$$

여기서 $[\cdots]$는 넓이를 나타낸다. 즉 두 반직선 사이에서 벽까지 이르는 쐐기 전체에서, 탑의 먼 면들 앞쪽에 있는 쐐기 부분(탑 앞의 보이는 땅과 탑 자체)을 뺀 것이다.

$P(p,0)$, $R(12,q)$, $C(12,12)$, $Q(r,12)$에 신발끈 공식(shoelace formula)을 적용한다. 여기서 $q = \frac{4(12-p)}{8-p}$, $r = 6 - \frac{p}{2}$이다.

$$\begin{aligned}[PRCQ] &= \tfrac{1}{2}(pq + (144-12q) + (144-12r) - 12p) \\ &= \tfrac{1}{2}(288 - 12p - 12r - (12-p)q) = 108 - 3p - \frac{2(12-p)^2}{8-p},\end{aligned}$$

여기서 $12r = 72 - 6p$를 이용했다. 마찬가지로 $P(p,0)$, $Y(8,4)$, $Z(8,8)$, $T(4,8)$에 대해

$$[\,PYZT\,] = \tfrac{1}{2}(4p + 32 + 32 - 8p) = 32 - 2p.$$

그러므로

$$H(p) = 76 - p - \frac{2(12-p)^2}{8-p}.$$

생각해 보기 이것을 최적화하기 쉽게 만드는 치환(substitution)이 있을까?

다루기 불편한 분모를 보면 $u = 8 - p$로 놓고 싶어진다. 그러면 u는 $[4,8]$ 위를 움직이고 $12 - p = u + 4$이다. 이때

$$H = 76 - (8-u) - \frac{2(u+4)^2}{u} = 68 + u - \frac{2u^2 + 16u + 32}{u} = 52 - \left(u + \frac{32}{u}\right).$$

소문항 (i): 보이는 넓이의 최솟값

H가 가능한 한 커야 하므로, $u + \frac{32}{u}$가 가능한 한 작아야 한다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해 $u > 0$일 때

$$u + \frac{32}{u} \;\geq\; 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2},$$

이고, 등호는 정확히 $u = \frac{32}{u}$, 즉 $u = 4\sqrt{2}$일 때 성립한다. 이 값은 $[4,8]$에 속하므로 ($4\sqrt{2} \approx 5.66$) 허용된다. 그러면 $p = 8 - u$이고, 보이는 넓이는 경비병이 다음 위치에 있을 때 가장 작다.

$$\boxed{p = 8 - 4\sqrt{2} \;\approx 2.34 \text{ 단위, 기준점 } A}$$

이 점에서 그는 $52 - 8\sqrt{2}$를 볼 수 없으므로, $76 + 8\sqrt{2} \approx 87.3$ 제곱단위를 본다.

소문항 (ii): 보이는 넓이의 최댓값

이제 H가 가능한 한 작아야 하므로, $[4,8]$에서 $f(u) = u + \frac{32}{u}$가 가능한 한 커야 한다. $f'(u) = 1 - \frac{32}{u^2}$이므로 f는 $[4, 4\sqrt{2}]$에서 감소하고 $[4\sqrt{2}, 8]$에서 증가한다. 따라서 최댓값은 끝점에서 나타난다. 계산하면

$$f(4) = 4 + 8 = 12, \qquad f(8) = 8 + 4 = 12,$$

로 두 값이 같다. 따라서 H는 $u = 8$과 $u = 4$, 즉 $p = 0$과 $p = 4$ 두 곳에서 최솟값 $52 - 12 = 40$을 갖는다. 보이는 넓이는 경비병이 다음 위치에 설 때 최대 $128 - 40 = 88$ 제곱단위가 된다.

$$\boxed{\text{점 } A\ (p = 0) \text{ 또는 점 } E\ (p = 4)}$$

그리고 AE의 다른 어떤 점에서도 최대가 되지 않는다.

검산

- $p = 0$일 때는 그림자를 손으로 구할 수 있다. 반직선은 $(6, 12)$와 $(12, 6)$에서 벽과 만나고, 가려진 육각형의 넓이는 40으로 $H(0)$과 일치한다.
- $p = 4$일 때 T를 지나는 반직선은 직선 $x = 4$를 따라 곧게 올라가며, 이번에도 $H(4) = 40$이다. 두 끝점의 값이 같다는 것은 좋은 신호이다. 공식이 한쪽으로 치우쳐 있지 않다는 뜻이다.
- 600×600 격자 위에서 P로부터의 시선이 탑을 통과하는지 검사하여 가려진 점을 세어 보았다. $p = 8 - 4\sqrt{2}$에서는 40.687이 나와 $52 - 8\sqrt{2} = 40.686$과 비교된다. $p = 1$에서는 40.429가 나와 $H(1) = \frac{283}{7} \approx 40.429$와 비교된다.

흔한 실수

- 스치는 점으로 T나 Y 대신 Z를 사용하는 것. 왼쪽 아래에서 보면 탑의 윤곽은 먼 꼭짓점이 아니라 두 꼭짓점 T와 Y로 정해진다.
- 소문항 (ii)에서 정류점(stationary point)에서 멈추는 것. 정류점은 보이는 넓이의 **최솟값**을 주므로, 최댓값은 끝점에서 나와야 하며, 여기서는 그런 점이 두 개이다.

STEP 너머

이것은 **가시성**(visibility) 문제의 작은 예로, 계산 기하학(computational geometry)에서 연구하는 종류의 문제이다 ("미술관 문제(art gallery problem)"는 다각형 모양의 방의 모든 점을 지켜보는 데 경비병이 몇 명 필요한지를 묻는다). 최적화 단계는 해석학의 기본적인 사실 하나를 보여 준다. 닫힌구간에서 연속인 함수는 최댓값과 최솟값을 가지며, 그 값은 정류점 또는 끝점에서 나타난다. 이것이 최대·최소 정리(extreme value theorem)이며, Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)에 자세히 증명되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.