풀이

STEP I 1991, 문제 3

순수수학 • 복소 등비급수

> **STEP I 1991, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q3

핵심 아이디어

아르강 도표(Argand diagram)에서 $re^{i\phi}$를 곱하면 벡터(vector)의 길이가 r배가 되고 시계 반대 방향으로 ϕ만큼 회전한다. 경로의 각 선분은 바로 앞 선분을 같은 비율로 늘리고 같은 각만큼 돌린 것이므로, 각 선분 벡터는 바로 앞 선분 벡터에 일정한 복소수를 곱한 것이다. 따라서 선분들은 등비수열(geometric progression)을 이루고, 이들을 더하면 모든 꼭짓점의 위치를 구할 수 있다.

풀이

연속한 두 선분의 비

P_n에서 P_{n+1}로 가는 벡터는 $z_{n+1}-z_n$으로, P_{n-1}에서 P_n으로 가는 벡터는 z_n-z_{n-1}로 나타난다. 두 복소수의 몫에서는 절댓값(modulus)끼리 나누고 편각(argument)끼리 뺀다.

$$\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}}\right| = \frac{P_nP_{n+1}}{P_{n-1}P_n} = d, \qquad \arg\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}} = \arg(z_{n+1}-z_n) - \arg(z_n-z_{n-1}) = \theta,$$

이는 두 번째 선분의 길이가 첫 번째 선분의 d배이고, 한 유향 선분의 방향에서 다음 유향 선분의 방향까지 시계 반대 방향으로 잰 각이 θ이기 때문이다. (편각은 2π의 정수배 차이를 무시하고서만 정해지지만, 이는 복소수 자체에는 영향을 주지 않는다.) 따라서 모든 $n \geq 2$에 대하여

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}} = d\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = d(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

z_{n+1}에 대한 식

$w = de^{i\theta}$라 하자. 첫 번째 선분은 $z_2 - z_1 = 1$이고, 이후의 각 선분은 바로 앞 선분의 w배이므로 수학적 귀납법(induction)에 의해

$$z_{k+1} - z_k = w^{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

이 식들을 $k = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 더하면 좌변은 연쇄적으로 소거되어(telescoping) $z_{n+1} - z_1 = z_{n+1}$이 된다.

$$z_{n+1} = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = \frac{w^n - 1}{w - 1} = \frac{d^n e^{in\theta} - 1}{de^{i\theta} - 1}.$$

등비급수(geometric series)의 합을 구하려면 $w \neq 1$이어야 하는데, $|w| = d$이므로 바로 여기서 $d \neq 1$이라는 조건이 쓰인다.

$\theta = \frac{1}{3}\pi, d = 2$인 경우

이제 $w = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$이므로 분모가 매우 간단해진다. 즉 $w - 1 = i\sqrt{3}$이다. $\frac{1}{i} = -i$이므로

$$z_{n+1} = \frac{w^n - 1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\left(2^n \cos\tfrac{n\pi}{3} - 1 + i\,2^n \sin\tfrac{n\pi}{3}\right),$$

이고, 따라서

$$\operatorname{Re} z_{n+1} = \frac{2^n \sin\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{Im} z_{n+1} = \frac{1 - 2^n \cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}.$$

생각해 보기 $\operatorname{Im} z_{n+1}$의 부호로부터 경로가 실수축을 가로지른다는 사실을 어떻게 알 수 있는가?

경로는 끊어지지 않고 이어져 있다. 즉 선분들이 연속적으로 연결된 사슬이다. 어떤 꼭짓점이 실수축보다 엄격히 아래에 있고 그 뒤의 어떤 꼭짓점이 실수축보다 엄격히 위에 있다면(또는 그 반대라면), 두 꼭짓점 사이의 경로는 반드시 실수축을 가로질러야 한다. 그러므로 서로 반대쪽에 있는 꼭짓점들을 거듭해서 찾으면 된다.

$\cos\frac{n\pi}{3}$의 값은 주기 6으로 반복된다. 임의의 정수 $k \geq 1$을 잡자.

- $n = 6k$이면 $\cos\frac{n\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1$이므로, $2^{6k} > 1$에서 $\operatorname{Im} z_{6k+1} = \dfrac{1 - 2^{6k}}{\sqrt{3}} < 0$이다.
- $n = 6k + 3$이면 $\cos\frac{n\pi}{3} = \cos(2k\pi + \pi) = -1$이므로 $\operatorname{Im} z_{6k+4} = \dfrac{1 + 2^{6k+3}}{\sqrt{3}} > 0$이다.

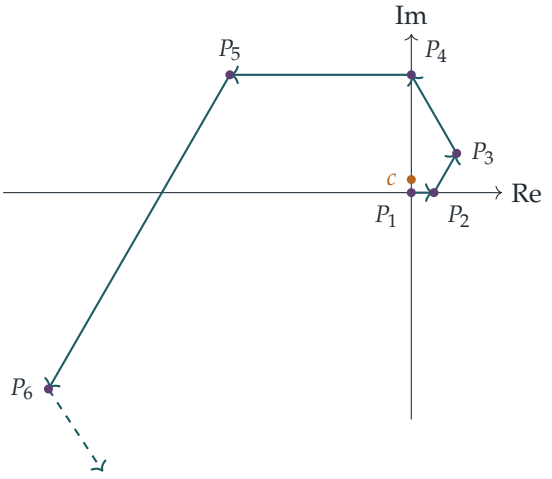
따라서 모든 $k \geq 1$에 대하여 P_{6k+1}은 실수축 아래에, P_{6k+4}는 실수축 위에 있다. 그러므로 각 $k = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여 P_{6k+1}에서 P_{6k+4}까지의 경로는 실수축을 아래에서 위로 가로지

른다. 이 부분들은 k마다 하나씩인 서로 다른 경로 부분이므로, 경로는 실수축을 무한히 여러 번 가로지른다. (같은 논리로 P_{6k+4}와 P_{6k+7} 사이에서는 위에서 아래로도 가로지른다.) 이로써 증명이 끝난다.

사실 꼭짓점들은 세 개씩 묶여서 돌아간다. $\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2, \ldots$의 부호는 $0, 0, +, +, +, -, -, -, +, +, +, \ldots$의 꼴이다. 여기에는 깔끔한 기하학적 이유가 있다.

$$z_{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\, w^n,$$

으로 쓰면, P_{n+1}은 고정점 $c = \mathrm{i}/\sqrt{3}$로부터 거리 $2^n/\sqrt{3}$만큼 떨어져 있고, 한 단계마다 c를 중심으로 60°씩 회전함을 알 수 있다. 꼭짓점들은 한 단계마다 크기가 두 배가 되는 c 둘레의 나선 위에 있고, c는 실수축 바로 위에 있으므로 나선은 계속해서 실수축을 휩쓸고 지나간다.



그림은 $P_1, \ldots, P_6$을 보여 준다. 다음 꼭짓점은 $P_7 = -21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$로, 훨씬 아래에 있다. 경로는 P_5P_6에서 처음으로 실수축을 가로지르고, 그 뒤로 실수축 아래에 머물다가 $P_8 = 64 - 21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$에서 $P_9 = 128 + 43\sqrt{3}\,\mathrm{i}$로 가는 P_8P_9에서 위로 가로지른다.

검산

- 기하적으로 직접 구하면 $z_3 = 1 + w = 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$이고, 공식으로는 $\operatorname{Im} z_3 = (1 - 4\cos\frac{2\pi}{3})/\sqrt{3} = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$이다. 마찬가지로 $w^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$와 $w^3 = -8$을 더하면 $z_5 = -8 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$이고, $n = 4$를 대입한 공식은 $\operatorname{Re} z_5 = 16\sin\frac{4\pi}{3}/\sqrt{3} = -8$, $\operatorname{Im} z_5 = (1+8)/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$을 준다.
- $d = 1$이면 꼭짓점들은 정다각형 위에 놓이고 경로는 닫힌다. 등비급수 공식이 바로 이 때 성립하지 않는 것은 당연하다.

- 길이와 회전각으로부터 경로를 수치적으로 구성하여(임의의 d, θ, 시작점에 대하여) 비 $de^{i\theta}$, z_{n+1}의 닫힌 형태, 그리고 $\theta = \frac{1}{3}\pi$, $d = 2$일 때 위의 부호 패턴을 확인하였다. $z_1, \ldots, z_{41}$ 중에서 $\operatorname{Im} z$의 부호가 바뀌는 횟수는 13번이다.

흔한 실수

- 비를 $\frac{1}{d}e^{-i\theta}$로 쓰는 실수: 분자에 있는 것은 **나중** 선분이므로, d배 더 길고 $+\theta$만큼 회전한 것이 바로 이 선분이다.
- 합에서 하나 차이가 나는 실수: P_1에서 P_{n+1}까지는 선분이 n개 있으므로 급수는 w^{n-1}까지이다.
- 축 위에 있는 꼭짓점 하나로 가로지름을 주장하는 실수: 꼭짓점들이 서로 반대쪽에 **엄격히** 놓여 있어야 한다(여기서 z_1과 z_2는 축 위에 있으므로 $k \geq 1$부터 시작한다).

STEP 너머

규칙 $z_{n+1} - z_n = w(z_n - z_{n-1})$은 선형 점화식(linear recurrence)이고, 각 꼭짓점을 다음 꼭짓점으로 보내는 사상 $z \mapsto c + w(z - c)$는 고정점 c를 중심으로 하는 **나선 닮음 변환**(spiral similarity), 즉 회전과 확대를 결합한 것이다. 이러한 사상은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)의 가장 간단한 예이며, 이를 반복하면 조개껍데기에서 볼 수 있는 등각 나선(로그 나선, equiangular/logarithmic spiral)이 만들어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 곱셈을 이렇게 기하적으로 생각하는 방식을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.