풀이

STEP I 1991, 문제 2

순수수학 • 변화율

> **STEP I 1991, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q2

핵심 아이디어

녹는 법칙을 반지름으로 나타낸다. 구에서는 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$이고 표면적(surface area) 역시 $4\pi r^2$이다. 따라서 "부피가 표면적에 비례하는 비율로 줄어든다"는 말은 곧 반지름이 일정한 비율로 줄어든다는 뜻이다. 두 눈덩이는 같은 상수를 공유하므로, 어떤 시간 동안이든 두 반지름은 같은 양만큼 줄어든다. 그러면 모든 것이 하나의 변수, 곧 각 반지름이 줄어든 양 x의 함수가 된다.

풀이

반지름은 같은 일정한 비율로 줄어든다

눈덩이의 반지름을 r, 부피를 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 표면적을 $S = 4\pi r^2$이라 하자. 녹는 법칙은 상수 $k > 0$에 대하여 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kS$이고, 이 상수는 두 눈덩이에서 같다. 연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k \cdot 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k,$$

이다. 여기서 $4\pi r^2$으로 나누었는데, 눈덩이가 아직 남아 있는 동안($r > 0$)에는 이것이 정당하다. 따라서 시간 t가 지난 뒤 각 반지름은 같은 양 $x = kt$만큼 줄어든다. 머리의 반지름은 $2R - x$, 몸통의 반지름은 $3R - x$이며, 이는 $0 \le x \le 2R$에서 성립한다(머리는 $x = 2R$에서 사라진다).

키가 절반일 때의 부피

머리가 몸통 위에 얹혀 있으므로 프로스티(Frosty)의 키는 두 지름의 합이다.

$$h = 2(2R - x) + 2(3R - x) = 10R - 4x.$$

처음에는 $h = 10R$이므로, 키가 절반이라는 것은 $10R - 4x = 5R$, 곧 $x = \frac{5}{4}R$이라는 뜻이다. 이 값은 $2R$보다 작으므로 머리는 아직 남아 있고, 이때 반지름은 $\frac{3}{4}R$와 $\frac{7}{4}R$이다. 비에서 인수 $\frac{4}{3}\pi$는 약분되므로

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{7}{4}\right)^3}{2^3 + 3^3} = \frac{(27 + 343)/64}{35} = \frac{370}{2240} = \frac{37}{224}.$$

따라서 키가 절반이 되었을 때 프로스티에게는 처음 부피의 $\frac{37}{224} \approx 0.165$만 남는다. 부피는 길이의 세제곱에 비례하기 때문이다.

$\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$의 최댓값

$a = 2R - x$, $b = 3R - x$라 하자. $0 \le x < 2R$에서

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(a^3 + b^3), \qquad S = 4\pi(a^2 + b^2),$$

이고, $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} = -1$이므로

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -4\pi(a^2 + b^2), \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -8\pi(a + b).$$

> **생각해 보기** V와 S는 둘 다 시간(또는 x)의 함수이다. 그렇다면 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$는 무엇을 뜻하는가?

x가 증가하면 S는 순감소하므로($\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} < 0$이기 때문에) V를 S의 함수로 볼 수 있다. 연쇄법칙에 의하여 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \Big/ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}.$$

이제 결코 변하지 않는 $b - a = R$을 이용한다. $s = a + b = 5R - 2x$라 놓자. 그러면 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}((a + b)^2 + (b - a)^2) = \frac{1}{2}(s^2 + R^2)$이므로

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{s^2 + R^2}{4s} = \frac{s}{4} + \frac{R^2}{4s} = f(s), \text{ 라 하자.}$$

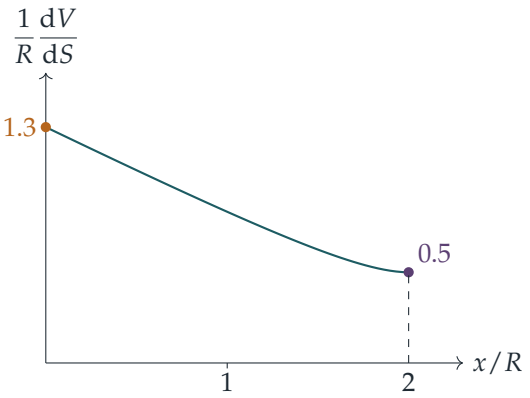
x가 0에서 $2R$까지 변할 때 s는 $5R$에서 R까지 줄어든다. 이제

$$f'(s) = \frac{1}{4} - \frac{R^2}{4s^2} = \frac{s^2 - R^2}{4s^2} > 0 \quad \text{단, } s > R,$$

이므로 f는 $[R, 5R]$에서 증가하고, 최댓값은 $s = 5R$, 곧 맨 처음($x = 0$)에서 얻는다.

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}\right)_{\max} = \frac{5R}{4} + \frac{R}{20} = \frac{13R}{10}.$$

(직접 계산하면 $\frac{4R^2 + 9R^2}{2 \cdot 5R} = \frac{13}{10}R$이다.) 그 뒤 이 값은 꾸준히 줄어들어, 머리가 사라지는 순간 $f(R) = \frac{1}{2}R$이 된다.



검산

- 각 눈덩이에 대하여 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kS$를 단계별로 수치 모의실험하면($R = k = 1$) $t \approx 1.25$에서 키가 절반이 되고, 이때 부피의 비는 0.16518로 $\frac{37}{224} = 0.165178\ldots$와 일치한다.
- 모의실험으로 얻은 V와 S의 유한차분(finite difference)은 전 구간에서 $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$와 일치하며, 결코 $1.3R$을 넘지 않는다.
- 단위: $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$는 부피를 넓이로 나눈 것이므로 길이이고, $\frac{13}{10}R$도 길이이다.

흔한 실수

- 키를 지름의 합이 아니라 반지름의 합으로 잡는 것. (이 문제에서는 우연히 x가 달라지지 않지만, 틀린 것이다.)
- $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ 대신 V/S를 계산하는 것. 구 하나에 대해서 $V/S = r/3$이지만 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S = r/2$이다.
- 정류점(stationary point)을 찾으려 드는 것. f의 극점은 끝점(endpoint)인 $s = R$에 있으므로, 최댓값은 구간의 반대쪽 끝에서 나타난다.

STEP 너머

이 문제의 핵심은 "표면적에 비례하는 비율"이라는 법칙이 반지름의 일정한 변화율로 바뀐다는 점으로, 기하가 미분방정식(differential equation)을 자명하게 만들 수 있음을 보여 주는 첫 번째 예이다. 후반부는 곡선 $(S(t), V(t))$를 따라가는 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$, 곧 매개변수 미분(parametric derivative)을 다루며, 닫힌구간(closed interval)에서 최댓값을 찾을 때 그 값이 정류점이 아니라 끝점에 있을 수 있으므로 주의해야 함을 보여 준다. Bartle과

Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 그러한 최댓값이 왜 반드시 존재하는지 설명한다. 미분방정식을 이용한 모델링에 대해서는 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.