풀이

STEP I 1991, 문제 14

확률과 통계 • 삼각형의 개수 세기

> **STEP I 1991, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q14

핵심 아이디어

세 길이 $a > b > c$가 퇴화하지 않은 삼각형(non-degenerate triangle)을 이루는 것은 가장 긴 변이 나머지 두 변의 합보다 **엄격하게** 짧을 때, 즉 $b + c > a$일 때와 정확히 같다. 나머지 두 삼각부등식(triangle inequality)은 저절로 성립한다. 따라서 a를 고정하고, 각 b에 대하여 $a - b$와 b 사이에 들어가는 c의 값의 개수를 센다. 이 개수는 2씩 증가하며, 바로 여기에서 홀수(또는 짝수)의 합이 나온다. 그다음 가능한 모든 a에 대하여 더할 때에는 $\sum k^2$에 대한 표준 공식만 있으면 된다.

풀이

삼각형은 언제 존재하는가?

$a > b > c > 0$이라 하자. 퇴화하지 않은 삼각형에 대한 세 삼각부등식은

$$b + c > a, \qquad a + c > b, \qquad a + b > c.$$

이다. 뒤의 두 부등식은 a가 이미 b보다도, c보다도 크므로 저절로 성립한다. 따라서 세 막대가 퇴화하지 않은 삼각형을 이루기 위한 필요충분조건은 $b + c > a$이다. ($b + c = a$이면 그 "삼각형"은 넓이가 0인 납작한 도형이 되므로 제외한다.)

가장 긴 막대의 길이가 짝수인 경우

a를 고정한다. 다음을 만족하는 정수 b, c가 필요하다.

$$a - b < c < b, \qquad b < a.$$

주어진 b에 대하여 $a-b+1 \le c \le b-1$을 만족하는 정수 c의 개수는

$$(b-1)-(a-b+1)+1 = 2b-a-1,$$

이다. 단, 이 값이 양수일 때에 한하며, 그렇지 않으면 그러한 c는 없다. (여기서 $c \ge a-b+1 \ge 2$이므로 c는 자동으로 실제 막대의 길이가 된다는 점에 주의한다.)

이제 a가 짝수라 하자. 그러면 $2b-a-1$은 홀수이고, 이 값이 1 이상인 것은 $b \ge \frac{a}{2}+1$일 때와 정확히 같다. 따라서 b는 $\frac{a}{2}+1$부터 $a-1$까지 움직이며, 다음을 얻는다.

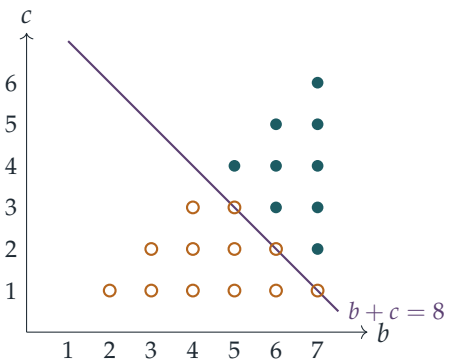
$$\begin{aligned} b = \tfrac{a}{2}+1: &\quad 2b-a-1 = 1,\\ b = \tfrac{a}{2}+2: &\quad 2b-a-1 = 3,\\ &\vdots\\ b = a-1: &\quad 2b-a-1 = a-3. \end{aligned}$$

b가 1 증가할 때마다 개수는 2씩 늘어나므로, 이 막대를 가장 긴 막대로 하는 삼각형의 개수는

$$1+3+5+\cdots+(a-3),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. ($a=2$이면 이 합은 빈 합인데, 가장 긴 변이 2인 삼각형은 없으므로 옳다.) 처음 k개의 홀수의 합은 k^2이고 여기서는 항이 $\frac{a-2}{2}$개이므로, 이 개수는 $(\frac{a-2}{2})^2$이다.

아래 그림은 $a=8$인 경우를 나타낸다. 각 점은 $8>b>c$인 순서쌍 (b,c)이고, 색칠된 점은 직선 $b+c=8$보다 위에 있는 점이다. 각 열에는 색칠된 점이 1개, 3개, 5개 있다.



가장 긴 막대의 길이가 홀수인 경우

이제 a가 홀수라 하자. 그러면 $2b-a-1$은 짝수이고, 이 값이 양수인 것은 $b \ge \frac{a+3}{2}$일 때와 정확히 같다. b가 $\frac{a+3}{2}$부터 $a-1$까지 움직일 때 개수는 $2,4,\ldots,a-3$이므로, 삼각형의 개수는

$$2+4+6+\cdots+(a-3) = 2\left(1+2+\cdots+\tfrac{a-3}{2}\right) = \frac{a-3}{2}\cdot\frac{a-1}{2} = \frac{(a-1)(a-3)}{4}.$$

이다. (이번에도 $a = 3$이면 올바르게 0이 나온다.)

삼각형의 총 개수

가장 긴 막대는 $3, 4, \ldots, 2N+1$ 중 어느 것이든 될 수 있다(그보다 작은 값에서는 어차피 삼각형이 생기지 않는다).

짝수 $a = 2m$, $m = 1, \ldots, N$인 경우: 개수는 $(m-1)^2$이므로, 이들의 기여는

$$\sum_{m=1}^{N} (m-1)^2 = \sum_{k=1}^{N-1} k^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}.$$

이다.

홀수 $a = 2m+1$, $m = 1, \ldots, N$인 경우: 개수는 $\frac{(2m)(2m-2)}{4} = m(m-1)$이므로, 이들의 기여는

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N} (m^2 - m) &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N(N+1)}{2} \\ &= \frac{N(N+1)(2N-2)}{6} = \frac{(N-1)N(N+1)}{3}.\end{aligned}$$

이다.

이 둘을 더하면, 퇴화하지 않은 삼각형을 이루는 선택의 수는

$$T_N = \frac{N(N-1)}{6}\left[(2N-1) + 2(N+1)\right] = \frac{N(N-1)(4N+1)}{6}.$$

이다.

> **생각해 보기** 왜 하나의 공식으로 합하지 않고 a의 홀짝성(parity)에 따라 합을 나누는가?

주어진 a에 대한 개수는 a가 짝수이면 $\frac{(a-2)^2}{4}$이지만, a가 홀수이면 $\frac{(a-1)(a-3)}{4} = \frac{(a-2)^2-1}{4}$이다. 이 둘은 a에 대한 서로 다른 다항식이므로, $a = 2m$ 또는 $a = 2m+1$로 놓으면 각각이 m에 대한 간단한 다항식이 되어 표준 공식으로 합할 수 있다.

$N = 3$일 때 확인하기

공식에 따르면 $T_3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 13}{6} = 13$이다. 막대 $1, \ldots, 7$로 직접 나열해 보자. 삼각형은 (a, b, c)로 쓴다.

- $a = 4$ (1개): $(4, 3, 2)$;
- $a = 5$ (2개): $(5, 4, 2)$, $(5, 4, 3)$;
- $a = 6$ (4개): $(6, 4, 3)$, $(6, 5, 2)$, $(6, 5, 3)$, $(6, 5, 4)$;

- $a = 7$ (6개): $(7,5,3)$, $(7,5,4)$, $(7,6,2)$, $(7,6,3)$, $(7,6,4)$, $(7,6,5)$.

즉 삼각형은 $1+2+4+6=13$개로, 공식과 일치한다(또한 짝수 a에 대해 $1=1^2, 4=2^2$이고, 홀수 a에 대해 $2=2\cdot 1, 6=3\cdot 2$인 것과도 일치한다).

확률

세 막대를 비복원추출(without replacement)로 무작위로 뽑을 때, 순서를 고려하지 않은 $\binom{2N+1}{3}$가지 선택은 모두 같은 정도로 일어날 수 있다.

$$\binom{2N+1}{3} = \frac{(2N+1)(2N)(2N-1)}{6},$$

이므로, 퇴화하지 않은 삼각형이 될 확률(probability)은

$$\frac{T_N}{\binom{2N+1}{3}} = \frac{N(N-1)(4N+1)}{(2N+1)\,2N\,(2N-1)} = \frac{(N-1)(4N+1)}{2(4N^2-1)},$$

이다. 여기서 인수 N을 약분하고 $(2N+1)(2N-1) = 4N^2-1$을 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $N=3$이면 확률은 $\frac{2\cdot 13}{2\cdot 35} = \frac{13}{35}$이고, 이는 $\binom{7}{3} = 35$가지 선택 중 삼각형 13개와 일치한다.
- $N \to \infty$일 때 확률은 $\frac{4N^2}{8N^2} = \frac{1}{2}$로 수렴(converge)한다. 이는 연속적인 경우와 일치한다. $[0,1]$에서 서로 독립인 균등분포(uniform distribution)를 따르는 세 길이에 대하여, 가장 긴 것이 나머지 두 개의 합보다 작을 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
- 2부터 29까지의 모든 N에 대하여 모든 세 쌍을 전수 조사(brute force)로 센 결과는 T_N 및 확률 공식과 정확히 일치하였다.

흔한 실수

- $b+c \geq a$를 사용하는 것: 등호가 성립하면 문제에서 제외하는 납작한 삼각형이 되며, 모든 개수가 너무 크게 나온다.
- 세 삼각부등식을 모두 따로 확인하거나, a가 가장 크면 $b+c>a$만 중요하다는 것을 잊는 것.
- b의 범위를 하나씩 어긋나게 잡는 것: $a=6$과 같은 작은 경우로 확인해 보자(삼각형은 $(6,4,3)$, $(6,5,2)$, $(6,5,3)$, $(6,5,4)$, 즉 $1+3$개).

STEP 너머

그림에서처럼 영역 안의 격자점(lattice point)을 세는 것은 넓이 계산의 이산적인 형태이며, N이 커지면 그 개수를 $\binom{2N+1}{3}$로 나눈 값은 단위 정육면체 안의 부피의 비에 가까워진다. 이처럼 이산 균등분포에서 연속 균등분포로 넘어가는 것과, 막대 자르기 문제(broken-stick problem) 같은 "기하학적 확률(geometric probability)" 문제는 대학 1학년의 고전적인 주제이다. 더 읽어 보려면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)이 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.