풀이

STEP I 1991, 문제 13

역학 • 운동량 보존

> **STEP I 1991, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q13

핵심 아이디어

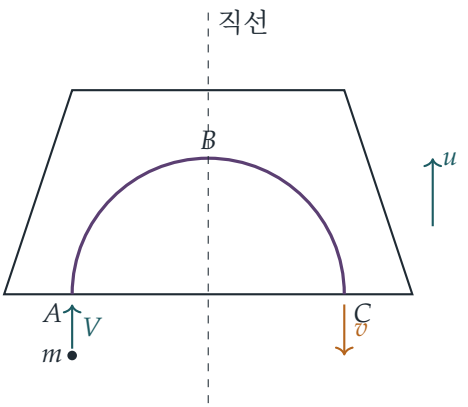
탁자도 매끄럽고 홈도 매끄러우므로, 계 바깥의 어떤 것도 직선 방향으로 밀지 않으며 어떤 힘도 일을 하지 않는다. 따라서 두 가지 보존 법칙(conservation law)을 얻는다. 직선 방향의 운동량(momentum) 보존과 운동 에너지(kinetic energy) 보존이다. 출구에서 홈의 접선(tangent)은 직선과 평행하므로, 출구에서는 두 속도가 모두 직선 방향이고, 그러면 두 법칙은 1차원 탄성 충돌(elastic collision)과 똑같이 작동한다. 고정된 박판(lamina)의 경우, 평균 힘은 단순히 전체 충격량(impulse)을 걸린 시간으로 나눈 것이다.

문제의 표현에 대해 한마디 하자. 문제에서는 A와 B에서의 접선이 직선과 평행하다고 했지만, 그림을 보면 직선과 평행한 것은 양 끝 A와 C에서의 접선이다(B에서 홈은 직선과 직각을 이룬다). 의도가 분명하므로 여기서는 A와 C를 사용한다.

풀이

움직이는 박판

입자는 질점(point mass)으로, 박판은 직선을 따라 평행이동만 할 수 있는 강체(rigid body)로 모형화하고, 모든 접촉은 매끄럽다고 하자. 직선을 축으로 잡고, 입자가 A로 들어올 때의 운동 방향을 양의 방향으로 한다.



입자가 직선 방향의 속도 v(V의 방향을 양으로 한다)로 C를 떠나고, 그때 박판의 직선 방향 속도를 u라 하자.

? 생각해 보기 C에서 입자의 속도가 왜 반드시 직선 방향이어야 하는가?

박판에 대해 상대적으로 보면 입자는 홈을 따라 움직이므로, C에서의 상대 속도(relative velocity)는 그 점에서의 접선 방향이고, 이는 직선과 평행하다. 박판 자체는 직선을 따라서만 움직인다. 이 둘을 더하면, C에서 입자의 실제 속도도 직선 방향이다. 따라서 출구에서는 각 물체마다 수 하나씩만 있으면 된다.

운동하는 동안 계(입자와 박판) 바깥에서 작용하는 힘은 연직 방향인 탁자의 수직항력(normal reaction)과, 박판을 직선 위에 붙잡아 두는 힘인데, 후자는 직선에 수직이다(직선이 매끄럽기 때문이다). 홈이 입자에 작용하는 힘과 입자가 홈에 작용하는 힘은 내력이므로 쌍으로 상쇄된다. 따라서 직선 방향의 운동량이 보존된다.

$$mV = mv + Mu. \tag{1}$$

모든 접촉이 매끄럽고 탁자가 수평이므로, 일은 전혀 이루어지지 않고 운동 에너지가 보존된다. (홈의 수직항력은 입자와 박판에 각각 따로 일을 하지만, 수직항력이 상대 속도에 수직이므로 이 두 양은 상쇄된다.) 따라서

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}Mu^2. \tag{2}$$

(1)과 (2)를 다음과 같이 다시 쓴다.

$$m(V - v) = Mu, \qquad m(V - v)(V + v) = Mu^2.$$

한 가지 해는 $v = V, u = 0$이다. 이것은 아무 일도 일어나기 전인 A에서의 상황이다. C에서 입자는 박판에 대해 뒤로 움직이고 있으므로 $v \neq V$이고 $u \neq 0$이며, 따라서 두 번째 식을 첫 번째 식으로 나누어

$$V + v = u.$$

를 얻는다. (이는 박판에 대한 입자의 상대 속력이 양 끝에서 모두 V라는 뜻이며, 탄성 충돌과 꼭 같다.) $u = V + v$를 (1)에 대입하면

$$mV = mv + MV + Mv \quad \Longrightarrow \quad v = -\frac{M-m}{M+m}V, \qquad u = V + v = \frac{2m}{M+m}V.$$

$m < M$이므로 v는 음수이다. 즉 입자는 왔던 방향으로 되돌아가며 C에서 나온다. 따라서 입자가 홈을 떠날 때

$$\text{입자의 속력} = \frac{M-m}{M+m}V, \qquad \text{박판의 속력} = \frac{2m}{M+m}V,$$

이고, 박판은 입자의 처음 운동 방향으로, 입자는 그 반대 방향으로 움직인다.

입자는 실제로 홈을 끝까지 돌아 나온다. 입자가 박판에 대해 멈추는 점이 있다면 그 점에서 입자는 박판과 같은 속도를 가지게 되고, 그러면 운동 에너지는 $\frac{1}{2}(mV)^2/(M+m) < \frac{1}{2}mV^2$가 되는데, 이는 에너지 보존에 어긋난다. 따라서 상대 속력은 결코 0으로 떨어지지 않는다.

박판을 고정한 경우

이제 박판은 움직일 수 없다. 홈이 입자에 작용하는 반작용은 입자의 속도에 수직이므로 일을 하지 않고, 입자는 일정한 속력 V로 반원을 돈다. 반원의 길이는 πr이므로 홈 안에 머무는 시간은

$$T = \frac{\pi r}{V}.$$

이다. 입자의 운동량은 앞쪽으로 mV에서 뒤쪽으로 mV로 바뀌므로, 박판이 입자에 준 전체 충격량은 직선을 따라 뒤쪽으로 $2mV$이다. 직선에 수직인 방향의 운동량은 양 끝에서 모두 0이므로, 충격량의 수직 성분은 0이다.

뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 따라 입자는 박판에 직선을 따라 앞쪽으로 충격량 $2mV$를 준다. 박판은 정지해 있으므로 고정핀(peg)이 반대 방향의 충격량을 공급해야 하고, 박판은 입자의 처음 운동 방향으로 전체 충격량 $2mV$로 고정핀을 민다. (직선에서 오는 옆 방향의 힘은 앞 문단에 의해 평균이 0이다.) T로 나누면 고정핀에 작용하는 평균 힘은

$$\frac{2mV}{\pi r/V} = \frac{2mV^2}{\pi r},$$

이고, 방향은 입자가 홈에 들어온 방향이다. (문제의 "단위 시간당 평균 힘"은 바로 이것, 즉 단위 시간당 충격량을 뜻한다.)

이를 직접 확인할 수도 있다. 입자에는 중심 쪽으로 mV^2/r의 힘이 필요하므로, 입자는 박판을 바깥쪽으로 mV^2/r로 민다. 입자로 향하는 반지름이 CA와 이루는 각을 θ라 하면(θ는 일정한 비율로 0에서 π까지 변한다), 이 힘의 직선 방향 성분은 $(mV^2/r)\sin\theta$이고, $[0, \pi]$에서 $\sin\theta$의 평균은 $2/\pi$이다.

검산

- $M \to \infty$이면 박판은 거의 움직이지 않는다. $u \to 0$이고 입자의 속력은 V로 수렴하며, 고정된 홈의 경우와 같다.
- $m = M$이면 입자는 정지한 채로 나오고 박판이 속력 V를 모두 가져간다. 같은 질량 사이의 탄성 충돌과 같다.
- $M = 3, m = 1, V = 2$이면 $v = -1, u = 1$이다. 운동량: $1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 2 = mV$. 에너지: $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2$. 운동 방정식을 수치 시뮬레이션해 보면(반원 모양의 홈과 반타원 모양의 홈 모두에 대해) 소수점 아래 여섯째 자리까지 같은 값이 나왔고, 고정된 박판에 대해 $(mV^2/r)\sin\theta$를 수치 적분하면 평균 힘 $2mV^2/(\pi r)$이 나왔다. 예를 들어 $m = 0.7, r = 1.3, V = 2.1$일 때 1.5117이다.

흔한 실수

- 근 $v = V, u = 0$을 택하는 것. 이 근은 두 식을 모두 만족하지만 출구가 아니라 들어오는 순간을 나타낸다.
- 직선 방향의 평균 힘 대신 최대 힘 mV^2/r을 쓰는 것. 옆 방향 성분은 상쇄되고, 직선 방향 성분은 B에서만 mV^2/r에 이른다.

STEP 너머

첫 번째 부분은 숨어 있는 충돌이다. 홈의 모양이 어떻든 보존되는 양과 출구의 방향만이 중요하며, 이것은 힘을 모르고도 보존 법칙으로 산란(scattering) 문제를 다루는 발상의 바탕이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)에서는 직선 방향의 좌표가 라그랑지안에 나타나지 않으므로, 그 켤레 운동량(conjugate momentum)이 자동으로 보존된다. 이것이 대칭과 보존 법칙 사이의 연결, 즉 뇌터 정리(Noether's theorem)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 운동량, 충격량, 충돌을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.