풀이

STEP I 1991, 문제 12

역학 • 마찰이 있는 평형

> **STEP I 1991, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q12

핵심 아이디어

가벼운 판자 AB는 양 끝에서만, 매끄러운 경첩(smooth hinge)을 통해 힘을 받는다. 따라서 이 판자가 CD에 작용하는 힘은 AB 방향이어야 한다. 이로써 문제는 미지의 힘 세 개가 작용하는 하나의 강체(rigid body) CD에 관한 문제로 줄어든다. C에 대한 모멘트(moment)를 취하면 AB의 추력(thrust)이 나오고, 이어서 힘을 성분으로 분해하면(resolving) C에서의 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)을 얻는다. 기하학적 조건(두 판자가 B에서 만난다)이 x를 α, β와 연결하며, 바로 이 때문에 답에서 l과 x가 사라진다.

풀이

모형

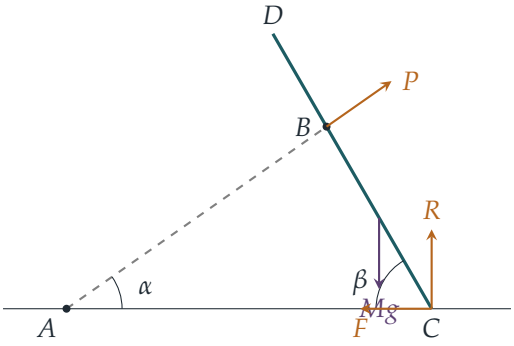
판자를 가벼운 강체 막대로, 화가를 질량 M인 입자로, A와 B의 경첩을 매끄러운 것으로 본다. 지면은 C에서 거칠고, 마찰계수(coefficient of friction)는 μ이다.

> **생각해 보기** 왜 B에서 두 판자 사이의 힘은 AB 방향이어야 할까?

판자 AB는 무게가 없고, 여기에 작용하는 힘은 A와 B의 매끄러운 경첩에서 오는 것뿐이다. A에 대한 모멘트를 취하면, B에서의 힘은 A에 대한 모멘트가 없으므로 BA 방향으로 작용한다. 그러면 A에서의 힘은 이와 크기가 같고 방향이 반대여야 한다. 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 AB는 B에서 CD를 AB 방향의 힘 P로 민다. P의 방향을 A에서 B로 향하는 쪽(추력)으로 잡는데, 계산 결과 $P > 0$임이 확인된다.

따라서 CD에 작용하는 힘은 다음과 같다. B에서의 추력 P는 수평선 위로 각 α를 이루며 A에서 멀어지는 방향을 향한다. 화가의 무게 Mg는 판자를 따라 C에서 거리 x인 곳에 작용

한다. C에서는 위쪽으로 수직항력 R, A 쪽으로 마찰력 F가 작용한다. 추력이 C를 A로부터 밀어내므로 마찰력은 A 쪽을 향해야 한다.



기하학적 조건

점 B는 AB의 꼭대기이므로 높이가 $2l\sin\alpha$이다. 또한 이 점은 CD를 따라 C에서 거리 $2x$에 있으므로 높이가 $2x\sin\beta$이기도 하다. 따라서

$$x\sin\beta = l\sin\alpha, \qquad \text{즉,} \qquad x = \frac{l\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

수평 거리 AC는 AB와 BC의 수평 정사영(projection)의 합이다.

$$AC = 2l\cos\alpha + 2x\cos\beta.$$

CD에 대한 모멘트와 힘의 분해

C에 대한 모멘트를 취한다. P의 작용선(line of action)은 직선 AB이고, C에서 이 직선까지의 수직 거리는 $AC\sin\alpha$이다. 무게는 C에서 수평 거리 $x\cos\beta$인 곳에 작용한다. 두 모멘트의 방향이 반대이므로

$$P\cdot AC\sin\alpha = Mg\,x\cos\beta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{Mg\,x\cos\beta}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha} > 0.$$

수평 방향과 수직 방향으로 분해하면

$$F = P\cos\alpha, \qquad R = Mg - P\sin\alpha.$$

P를 대입하면,

$$R = Mg\left(1 - \frac{x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta}\right) = Mg\,\frac{2l\cos\alpha + x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta},$$

$$F = Mg\,\frac{x\cos\beta\cos\alpha}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha}.$$

특히 $R > 0$이므로 끝 C는 지면에서 떨어지지 않는다. 나누면,

$$\frac{F}{R} = \frac{x\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + x\cos\beta)}.$$

이제 기하학적 조건 $x = l\sin\alpha/\sin\beta$를 이용한다. 그러면 $x\cos\beta = l\sin\alpha\cot\beta$이고,

$$\frac{F}{R} = \frac{l\sin\alpha\cot\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + l\sin\alpha\cot\beta)} = \frac{\cos\alpha\cot\beta}{2\cos\alpha + \sin\alpha\cot\beta} = \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

이다. 여기서 마지막 단계에서는 분자와 분모를 $\sin\alpha$로 나누었다.

판자 CD는 마찰력이 이 힘을 공급할 수 있을 때, 즉 $F \le \mu R$일 때에만 평형(equilibrium)을 이룬다. $R > 0$이므로 이 조건은

$$\mu \ge \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. (판자 AB는 A에서 경첩으로 고정되어 있으므로 필요한 힘이 얼마이든 제자리에 유지된다.)

마지막 부분

B가 D와 일치하면 $2x = 2l$이므로 $x = l$이다. 기하학적 조건에서 $\sin\beta = \sin\alpha$이고 두 각이 모두 예각이므로 $\beta = \alpha$이다. 두 판자와 지면은 $AC = 4l\cos\alpha$인 이등변삼각형을 이룬다. 마찰 조건은 다음과 같이 된다.

$$\mu \ge \frac{\cot^2\alpha}{3\cot\alpha} = \tfrac{1}{3}\cot\alpha, \qquad \text{즉,} \qquad \tan\alpha \ge \frac{1}{3\mu}.$$

따라서 평형은 정확히 $\alpha \ge \alpha_0$일 때 가능하다. 여기서 $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$이다.

생각해 보기 화가는 어디에 있으며, α가 변할 때 거리는 어느 방향으로 변할까?

화가는 CD의 중점, 즉 C에서 거리 l인 곳에 서 있다. A를 원점으로 잡으면 C는 $(4l\cos\alpha, 0)$에 있고, 화가의 위치는 다음과 같다.

$$(4l\cos\alpha - l\cos\alpha,\ l\sin\alpha) = (3l\cos\alpha,\ l\sin\alpha).$$

따라서 A에서 화가까지 거리의 제곱은

$$d^2 = 9l^2\cos^2\alpha + l^2\sin^2\alpha = l^2\left(1 + 8\cos^2\alpha\right).$$

이다. 이 값은 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 α가 증가하면 감소한다. 따라서 최대 거리는 허용되는 가장 작은 각 $\alpha = \alpha_0$에서 나타난다. 이때 $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$이므로

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha_0} = \frac{9\mu^2}{1 + 9\mu^2},$$

이고

$$d_{\max}^2 = l^2\left(1+\frac{72\mu^2}{1+9\mu^2}\right) = l^2\,\frac{1+81\mu^2}{1+9\mu^2}.$$

이다. 따라서 A에서 화가까지의 최대 거리는

$$l\sqrt{\frac{1+81\mu^2}{1+9\mu^2}},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. 이 값은 마찰이 정확히 한계 상태(limiting friction)일 때 실제로 달성된다.

검산

- 최종 답의 극한 경우: $\mu \to 0$이면 거리는 l로 수렴하며, 이는 두 판자가 모두 수직인 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$에 해당한다. $\mu \to \infty$이면 거리는 $3l$로 수렴하며, 이는 판자가 바닥에 평평하게 놓이고 화가가 $(3l, 0)$에 있는 경우에 해당한다. 둘 다 타당하다.
- $\beta \to \frac{\pi}{2}$, 즉 CD가 수직이면 $\cot\beta \to 0$이고 필요한 μ는 0으로 수렴한다. 수직인 판자에는 마찰이 필요 없으므로 이와 일치한다.
- 수치적으로, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$로 두고 CD에 대한 세 평형 방정식을 직접 풀면 $F/R = 0.13837$을 얻는데, 이는 공식과 일치한다. $\mu = 0.5$로 두고 α를 훑어 보면 최대 거리가 $2.55704\,l$이고, 공식으로는 $l\sqrt{21.25/3.25} = 2.55704\,l$이다.

흔한 실수

- B에서의 힘이 수평이거나 수직이라고 가정하는 것. AB는 가볍고 양 끝이 매끄러운 경첩으로 연결되어 있으므로 힘은 AB 방향이어야 한다.
- R에서 추력의 수직 성분을 빠뜨리는 것. 이 성분은 수직항력을 줄이므로 마찰력을 공급하기 더 어렵게 만든다.
- 마지막 부분에서 평형이 가능한 각에 대해서만이 아니라 모든 α에 대해 최댓값을 구하는 것.

STEP 너머

양 끝에 매끄러운 핀이 있는 가벼운 막대를 **이력 부재**(*two-force member*)라고 한다. 이를 알아보는 것은 공학 정역학(engineering statics)에서 핀 접합 골조(트러스, truss)를 분석하는 첫걸음이며, 이런 부재는 각각 순수한 인장력 또는 추력만을 전달한다. 마지막 부분은 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 목적함수가 단조이므로 최적값은 실현

가능 집합(feasible set)의 경계에서 나타난다. 이는 선형계획법(linear programming)과 최적화 전반에 걸쳐 되풀이되는 주제이다. 강체의 평형에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.