풀이

STEP I 1991, 문제 11

역학 • 도르래와 충격

> **STEP I 1991, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q11

핵심 아이디어

한 주기는 두 단계로 이루어진다. 추가 말뚝(pile)에 부딪히면 그 자리에서 멈추고 줄이 느슨해지므로, 평형추(counterweight)는 위로 날아올랐다가 중력만 받으며 자유롭게 다시 떨어진다. 그다음 줄이 갑자기 팽팽해지면서 두 물체가 운동량(momentum)을 나누어 가지고, 추가 다시 말뚝에 닿을 때까지 첫 부분에서 구한 일정한 가속도로 함께 움직인다. 등가속도(constant acceleration) 운동이므로 각 단계는 시간에 대해 대칭이다. 따라서 한 주기의 모든 속력은 바로 앞 주기의 속력에 일정한 수를 곱한 것이 되고, 곧바로 등비수열(geometric progression)이 얻어진다.

풀이

일정한 가속도

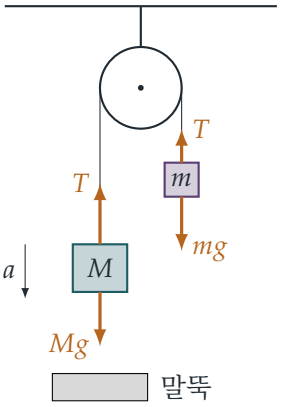
추와 평형추를 질점으로, 줄을 매끄럽고 가벼운 도르래에 걸린 가볍고 늘어나지 않는 줄로 모형화한다. 줄이 팽팽한 동안 두 질점은 같은 속력 v로 움직이며, 추는 아래로, 평형추는 위로 움직인다. 정지 상태에서 거리 x만큼 움직인 뒤 속력이 v가 되었다고 하자. 추는 위치 에너지(potential energy) Mgx를 잃고 평형추는 mgx를 얻는다. 도르래가 매끄럽고 줄이 가볍고 늘어나지 않으므로 에너지 손실이 없고,

$$\tfrac{1}{2}(M+m)v^2 = (M-m)gx.$$

이다. 양변을 시간에 대해 미분하고 $\dot{x} = v$를 이용하면, $v \neq 0$일 때

$$(M+m)v\dot{v} = (M-m)gv \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = g\,\frac{M-m}{M+m}$$

이다. 이것은 상수이다. 이를 a라 하자. 뉴턴(Newton)의 제2법칙으로도 같은 결과를 얻는다. T를 장력(tension)이라 하면 $Mg - T = Ma$이고 $T - mg = ma$이며, 두 식을 더하면 $(M - m)g = (M + m)a$가 된다.



한 충돌에서 다음 충돌까지

충돌 직전에 추는 속력 v로 아래로 움직이고, 평형추는 같은 속력 v로 위로 움직인다. 운동을 세 단계로 나누어 따라가 보자.

충돌. 충돌은 완전 비탄성(completely inelastic)이고 말뚝은 고정되어 있으므로 추는 멈춘다. 평형추는 여전히 속력 v로 위로 움직이므로 줄이 느슨해진다. 그러면 장력은 평형추에 아무 작용도 하지 못하고, 중력만이 추를 말뚝 쪽으로 누르므로 추는 그대로 머문다.

자유 비행. 줄이 느슨한 동안 평형추는 연직으로 움직이는 포물체(projectile)이다. 평형추는 올라갔다가 줄이 다시 팽팽해지는 지점, 곧 충돌 순간에 있던 지점으로 돌아온다. 일정한 가속도 g 아래에서 운동은 대칭이므로, 평형추는 시간

$$\frac{2v}{g}.$$

이 지난 뒤 속력 v로 **아래로** 움직이며 그 지점에 도착한다.

줄이 팽팽해지는 순간. 평형추가 속력 v로 아래로 움직이고 추가 정지해 있을 때 줄이 갑자기 팽팽해진다. 그러면 두 물체는 공통 속력 u로, 평형추는 아래로, 추는 위로 움직여야 한다. 주어진 가정에 따라 평형추가 잃은 운동량은 추가 얻은 운동량과 같다.

$$m(v - u) = Mu \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{mv}{M + m}.$$

? **생각해 보기** 여기서 왜 계 전체에 대해 그냥 운동량 보존을 쓸 수 없을까?

두 물체는 서로 반대 방향으로 움직이고 도르래가 충격량(impulse)을 가하므로, 전체 운동량이 보존되는 하나의 방향이 없다. 성립하는 것은, 줄이 가볍고 도르래가 매끄러우므로 충

격적 장력이 두 물체에 같은 크기 J로 작용한다는 사실이다. 따라서 평형추는 줄을 따라 운동량 J를 잃고, 추는 줄을 따라 J를 얻는다. 이것이 바로 우리가 가정해도 된다고 한 내용이다.

다시 함께. 이제 줄이 팽팽하고 추는 속력 u로 위로 움직인다. 첫 부분에 의해 가속도의 크기는 일정한 값 a이고, 방향은 더 무거운 물체 M이 내려가는 쪽이다. 따라서 추는 느려져서 멈춘 뒤 다시 말뚝으로 떨어진다. 이 운동도 등가속도이므로 대칭이다. 추는 시간

$$\frac{2u}{a}.$$

이 지난 뒤 속력 u로 말뚝에 닿는다. 따라서 다음 충돌 직전에 평형추의 속력은

$$u = \frac{mv}{M+m},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

시간 간격은 등비수열을 이룬다

$k = \dfrac{m}{M+m}$이라 두면 $0 < k < 1$이다. v_0을 첫 번째 충돌 직전의 속력이라 하자. 앞 부분에 의해 $(n+1)$번째 충돌 직전의 속력은 $v_n = k^n v_0$이다. 두 단계를 더하면, $(n+1)$번째 충돌에서 다음 충돌까지의 시간은

$$t_n = \frac{2v_n}{g} + \frac{2kv_n}{a} = \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) k^n v_0.$$

이다. 이는 상수에 k^n을 곱한 것이므로, 연속한 충돌 사이의 시간 간격은 공비가 $k = m/(M+m)$인 등비수열을 이룬다.

전체 시간

T_0을 놓은 순간부터 첫 번째 충돌까지의 시간이라 하자. 추는 정지 상태에서 가속도 a로 출발하므로 $v_0 = aT_0$이다. $0 < k < 1$이므로 등비급수(geometric series)는 수렴(converge)하고, 전체 시간은

$$T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} t_n = T_0 + \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k}.$$

이다. 이제 $1 - k = \dfrac{M}{M+m}$이고 $\dfrac{k}{a} = \dfrac{m}{M+m} \cdot \dfrac{M+m}{g(M-m)} = \dfrac{m}{g(M-m)}$이다. 따라서

$$\frac{2}{g} + \frac{2k}{a} = \frac{2}{g}\left(1 + \frac{m}{M-m}\right) = \frac{2M}{g(M-m)},$$

$$\left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k} = \frac{2M}{g(M-m)} \cdot \frac{M+m}{M} v_0 = \frac{2v_0}{a} = 2T_0.$$

이다. 그러므로 충돌은 무한히 많이 일어나지만, 걸리는 전체 시간은 유한하다. 추는 결국 시간

$$T_0 + 2T_0 = 3T_0,$$

이 지난 뒤 정지하며, 이는 출발부터 첫 번째 충돌까지 걸린 시간의 세 배이다.

검산

- 극한 $m \to 0$을 생각하자. 그러면 $k \to 0$이고 $a \to g$이므로, 첫 번째 충돌 이후 추는 다시는 들어 올려지지 않는다. 남은 시간은 평형추의 비행 시간 $2v_0/g = 2gT_0/g = 2T_0$뿐이고, 전체 시간은 일반 공식이 예측하는 대로 $3T_0$이다.
- 임의의 M, m과 낙하 높이(예를 들어 $M = 2.403$, $m = 1.571$이면 $k = 0.3953$)에 대해 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보았다. 속력의 비와 시간 간격의 비는 모두 0.3953으로 나왔고, 등비 꼬리 부분까지 포함한 전체 시간은 $2.99998\,T_0$으로 나왔다.

흔한 실수

- 자유 비행 단계를 빠뜨린다. 평형추는 충돌 후에도 계속 위로 올라가며, 한 주기에는 평형추가 포물체로 보내는 시간 $2v/g$가 포함된다.
- 느슨한 단계에서 g 대신 a를 쓴다. 줄이 느슨해지면 평형추에는 중력만 작용한다.
- 줄이 팽팽해지는 순간에 두 속도를 같은 방향으로 두고 "전체 운동량이 보존된다"라고 쓴다. 도르래가 줄의 방향을 바꾸므로, 나누어 가지는 것은 **줄을 따르는** 운동량이다.

STEP 너머

이 말뚝 박는 기계(piledriver)나 튀는 공처럼 유한한 시간 안에 무한히 많은 사건이 일어나는 현상을 제논(Zeno) 행동이라 한다. 이런 현상은 매끄러운 운동이 갑작스러운 도약으로 끊기는 혼합 시스템(hybrid system) 이론에서 나타난다. 줄이 팽팽해지는 순간은 간단한 충격적 구속(impulsive constraint)이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 대학 1학년 과정에서 이런 구속을 체계적으로 다룬다. 충격량, 충돌, 구속 운동에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.