풀이

STEP I 1991, 문제 10

역학 • 매달린 사슬의 평형

STEP I 1991, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/91-s1-q10

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.14 절 **현수선이 아니라 포물선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/bridge-parabola.html

핵심 아이디어

사슬의 각 이음점은 세 힘을 받아 평형(equilibrium)을 이룬다. 그 세 힘은 이웃한 두 고리의 장력(tension)과 그 이음점에 매달린 무게 w이다. 수평 방향으로 힘을 분해하면 모든 고리의 장력의 수평 성분이 **같다**는 것을 알 수 있다. 이어서 수직 방향으로 분해하면 각 이음점에서 수직 성분이 정확히 w만큼 줄어든다는 것을 알 수 있고, 수평 간격이 일정하므로 고리들의 기울기는 등차수열(arithmetic progression)을 이룬다. 기울기가 등차수열을 이룬다는 것은 포물선(parabola)의 이산적인 흔적이다.

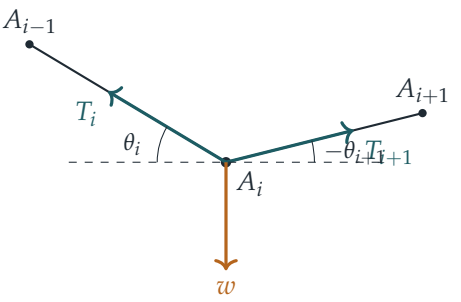
풀이

평형 방정식

사슬을 가볍고 유연하며 늘어나지 않는 것으로 모형화하여, 각 고리 $A_{i-1}A_i$의 장력이 고리를 따라 작용하도록 한다. θ_i를 $A_{i-1}A_i$가 수평선과 이루는 각으로 두되, x가 증가하는 방향으로 갈 때 **아래쪽**으로 재어 다음이 성립하게 한다.

$$\tan\theta_i = \frac{y_{i-1} - y_i}{h}.$$

(다리의 오른쪽 절반에서는 θ_i가 음수이지만, 아래의 논의는 그 부호와 무관하다.) 이음점 A_i는 A_iA_{i-1} 방향으로 T_i, A_iA_{i+1} 방향으로 T_{i+1}의 힘을 받고, 버팀대에 의해 아래로 크기 w의 힘을 받는다.



$1 \le i \le n+1$에 대하여(사실은 모든 $1 \le i \le 2n+1$에 대하여) A_i에서 수평 방향과 수직 방향으로 힘을 분해하면 다음을 얻는다.

$$T_i \cos\theta_i = T_{i+1}\cos\theta_{i+1},$$
$$T_i \sin\theta_i - T_{i+1}\sin\theta_{i+1} = w.$$

이것이 문제에서 요구한 방정식이다.

비

첫 번째 방정식은 $T_i\cos\theta_i$가 모든 고리에서 같다는 뜻이다. 이 공통의 수평 성분을 H라 하자. 사슬은 당기기만 할 수 있으므로 H는 양수이다. 두 번째 방정식을 H로 나누고 $\tan\theta_i = (y_{i-1}-y_i)/h$를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\frac{H}{h}(y_{i-1}-y_i) - \frac{H}{h}(y_i - y_{i+1}) = w.$$

따라서 고리 i의 장력의 수직 성분을 $V_i = H(y_{i-1}-y_i)/h$로 쓰면 다음이 성립한다.

$$V_i - V_{i+1} = w \quad (1 \le i \le 2n+1), \qquad \text{따라서} \qquad V_i = V_1 - (i-1)w \quad (1 \le i \le 2n+2).$$

생각해 보기 미지수 V_1 하나가 남았다. 다리에 관한 어떤 사실이 이 값을 정해 주는가?

두 지지점의 높이가 같다. 사슬 전체를 따라 낙차를 모두 더하면 다음과 같다.

$$0 = y_0 - y_{2n+2} = \sum_{i=1}^{2n+2}(y_{i-1}-y_i) = \frac{h}{H}\sum_{i=1}^{2n+2} V_i$$
$$= \frac{h}{H}\Big[(2n+2)V_1 - w\big(0+1+\cdots+(2n+1)\big)\Big].$$

대괄호 안은 $(2n+2)V_1 - w(2n+1)(n+1)$이므로 $V_1 = \frac{1}{2}(2n+1)w$이다. (이는 전체의 수직 평형에서 예상되는 결과이기도 하다. 두 지지점이 전체 하중 $(2n+1)w$를 똑같이 나누어 받는다.) 그러므로 다음이 성립한다.

$$V_i = \tfrac{1}{2}(2n+3-2i)\,w, \qquad \text{즉,} \qquad y_{i-1}-y_i = \frac{(2n+3-2i)\,wh}{2H}.$$

$i = n+1, n, \ldots, 1$을 대입하면 낙차는 각각 $wh/(2H)$의 $1, 3, \ldots, 2n+1$배가 된다.

$$\frac{h}{y_n - y_{n+1}} = \frac{3h}{y_{n-1} - y_n} = \cdots = \frac{(2n+1)h}{y_0 - y_1} = \frac{2H}{w},$$

이것이 구하려던 연속된 등식이다. (마지막 분자는 시험지에 $(2n+1)y$로 인쇄되어 있지만, 규칙성으로 보나 다른 비들처럼 무차원(dimensionless)이 되어야 한다는 점으로 보나 $(2n+1)h$여야 한다.)

포물선

$k = wh/(2H)$라 하자. A_0에서부터 낙차를 더하면 다음을 얻는다.

$$y_i = y_0 - k\sum_{j=1}^{i}(2n+3-2j) = y_0 - k\big[(2n+3)i - i(i+1)\big] = y_0 - k\,i\,(2n+2-i).$$

$m = n+1$로 쓰면 $i(2m-i) = m^2 - (i-m)^2$이므로

$$y_i = (y_0 - km^2) + k(i-m)^2 = y_{n+1} + k(i-n-1)^2,$$

이다. 여기서 $i = m$을 대입하면 $y_0 - km^2 = y_{n+1}$임을 알 수 있다. 이제 $x_i = x_0 + ih$이므로 $(i-n-1)h = x_i - x_{n+1}$이고, $0 \le i \le 2n+2$인 모든 점 A_i는 다음을 만족한다.

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}(x - x_{n+1})^2.$$

이것은 가장 낮은 점 A_{n+1}을 지나는 수직인 축을 가진 하나의 포물선이므로, 점 $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+2}$는 모두 이 포물선 위에 있다. 양 끝점도 포함된다. $i = 0$과 $i = 2n+2$는 마땅히 그래야 하듯이 둘 다 y_0을 준다.

검산

- $n = 0$이면 가운데에 버팀대가 하나 있다. 공식은 $V_1 = \frac{1}{2}w$를 주므로, 당연히 그래야 하듯이 사슬의 각 절반이 하중의 절반을 지탱한다.
- 이 결과는 연속적인 모형과도 일치한다. 수평 장력이 H인 케이블에 수평 단위 길이당 균일한 하중 w/h가 매달려 있으면 $y'' = (w/h)/H$가 되는데, 우리의 포물선도 $y'' = w/(Hh)$이다.
- 수치 검산에서는 무작위로 200개의 다리($1 \le n \le 8$, 무작위 H, w, h)를 잡아 이음점 방정식을 정확한 분수 연산으로 연립일차방정식(linear system)으로서 직접 풀고, 비의 등식, 공식 $y_i = y_0 - k\,i(2n+2-i)$, 포물선, 그리고 모든 이음점에서의 완전한 힘의 평형을 확인하였다. 예를 들어 $n = 2$, $w = 2$, $H = 5$, $h = 1$이면 내려가는 쪽의 낙차는 1.0, 0.6, 0.2이고, 각 비는 $2H/w = 5$와 같다.

흔한 실수

- 대칭성을 들어 아무 설명 없이 $y_n = y_{n+2}$라고 쓰는 것. 이는 참이지만 지지점의 높이가 같다는 사실에서 나오는 것이다. 위의 합산 논법은 이를 가정하지 않고 증명한다.
- 장력의 수평 성분이 일정하다는 것을 잊고 각 T_i를 따로 구하려 하는 것. 이 문제에서는 T_i 자체가 전혀 필요하지 않다(그 값은 $\sqrt{H^2 + V_i^2}$이다).
- 사슬의 올라가는 절반에서 θ_i의 부호를 혼동하는 것. 처음부터 끝까지 $\tan\theta_i = (y_{i-1} - y_i)/h$로 계산하면 이를 피할 수 있다.

STEP 너머

자기 무게로 늘어진 사슬은 현수선(catenary) $y = c\cosh(x/c)$를 이루지만, 도로 상판처럼 **수평** 방향으로 고르게 분포된 하중을 지탱하는 사슬은 포물선을 이룬다. 이 문제는 그 사실의 이산적인 판이다. 이계차분 방정식(second-difference equation) $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} =$ 상수는 $y'' =$ 상수의 유한차분(finite-difference) 꼴이며, 같은 아이디어가 미분방정식의 수치해법의 바탕에 깔려 있다. 변분법(calculus of variations)은 현수선과 그와 관련된 곡선들을 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 줄과 케이블의 정역학(statics)이 꼼꼼하게 다루어지는 것을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.