풀이

# STEP I 1991, 문제 1

순수수학 • 삼각함수 항등식

> **STEP I 1991, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q1

## 핵심 아이디어

각에 대한 조건을 쓰면 각 하나를 없앨 수 있다. $\psi = \frac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)$이므로 $\sin\psi = \cos(\theta + \phi)$이고, 따라서 항등식(identity)은 자유로운 두 각에 대한 명제가 된다. 그다음에는 곱 $\sin\theta\sin\phi$와 $\cos(\theta + \phi)$가 합쳐져 $\cos(\theta - \phi)$가 되고, 곱 $\cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)$는 아주 깔끔한 꼴을 가진다. 둘째 부분에서는 각을 특별하게 고르면 $\psi$가 $\theta$의 **절반**이 되는데, 바로 여기에서 $\frac{1}{10}\pi$에 대한 정보가 나온다.

## 풀이

### 항등식

$\theta + \phi + \psi = \frac{1}{2}\pi$이므로

$$\sin\psi = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)) = \cos(\theta + \phi).$$

따라서 항등식의 좌변은

$$L = \sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos(\theta + \phi)[\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi].$$

대괄호 안에서 $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$이므로

$$\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta - \phi).$$

이제 곱 $\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)$를 구해야 한다. 덧셈정리(compound-angle formulae)를 써서 전개하면

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi) &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)\\ &= \cos^2\theta\cos^2\phi - \sin^2\theta\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta\,(1-\sin^2\phi) - (1-\cos^2\theta)\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta - \sin^2\phi.\end{aligned}$$

그러므로

$$L = \sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos^2\theta - \sin^2\phi = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

이고, 이것이 증명하려던 항등식이다.

### $\sin\frac{1}{10}\pi$에 대한 삼차방정식

$\theta = \phi = \frac{1}{5}\pi$로 놓자. 그러면 $\psi = \frac{1}{2}\pi - \frac{2}{5}\pi = \frac{1}{10}\pi$이다. 이제

$$x = \sin\tfrac{1}{10}\pi, \qquad s = \sin\tfrac{1}{5}\pi.$$

라 하자. 항등식으로부터

$$2s^2 + x^2 + 2s^2x = 1, \qquad \text{즉} \qquad 2s^2(1+x) = 1 - x^2. \tag{$*$}$$

> **생각해 보기** 그냥 $\sin\psi = \cos 2\theta = 1 - 2s^2$를 써서 $s$를 소거하면 왜 안 될까?

이 관계식은 $\psi = \frac{1}{2}\pi - 2\theta$인 **모든** $\theta$에 대해 성립하므로, $s^2 = \frac{1}{2}(1-x)$를 $(*)$에 대입하면 $(1-x)(1+x) = 1 - x^2$를 얻는다. 참이지만 아무 정보도 없다. $\frac{1}{5}\pi$만의 특별한 성질을 써야 한다. 그 특별한 사실은 $\frac{1}{5}\pi = 2\cdot\frac{1}{10}\pi$, 즉 $\theta = 2\psi$라는 것이고, 배각 공식(double-angle formula)이 $s$와 $x$를 이어 준다.

$$s = \sin 2\psi = 2\sin\psi\cos\psi, \qquad \text{따라서} \qquad s^2 = 4x^2(1-x^2).$$

이것을 $(*)$에 대입하면

$$8x^2(1-x^2)(1+x) = 1 - x^2.$$

$0 < \frac{1}{10}\pi < \frac{1}{2}\pi$이므로 $0 < x < 1$이고, 따라서 $1 - x^2 \neq 0$이므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$8x^2(1+x) = 1, \qquad \text{즉} \qquad 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0.$$

따라서 $\sin\frac{1}{10}\pi$는 주어진 삼차방정식(cubic)을 만족한다.

## 검산

항등식은 $\theta = \frac{1}{2}\pi, \phi = \psi = 0$으로 확인해 볼 수 있다. 이때 좌변은 $1+0+0+0 = 1$이다. $\theta = \phi = \psi = \frac{1}{6}\pi$이면 좌변은 $3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 1$이다.

삼차방정식의 경우 $\sin\frac{1}{10}\pi = \sin 18^\circ \approx 0.309017$이고, 이 값에서 $8x^3 + 8x^2 - 1$을 계산하면 반올림 오차 범위 안에서 0이 된다. 실제로 이 삼차식은 $(2x+1)(4x^2+2x-1)$로 인수분해(factorise)되고, 근(root)은 $-\frac{1}{2}$와 $\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5})$이며, $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \approx 0.309017$은 잘 알려진 $\sin 18^\circ$의 정확한 값이다.

## 흔한 실수

- $\sin\psi = \cos 2\theta$만으로 $s$를 소거하여 항등식 $0 = 0$을 얻는 것. 위의 상자를 보라.
- $1 - x^2$가 왜 0이 아닌지 말하지 않고 그것으로 나누는 것. 여기서 $x = \sin\frac{1}{10}\pi$는 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다.

## STEP 너머

삼차방정식의 나머지 두 근도 우연이 아니다. $-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$이고 $\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) = -\sin\frac{3}{10}\pi$이다. 이런 방정식은 $\pi$의 유리수배에서의 sin과 cos 값 사이의 대수적 관계를 기록하며, 이는 1의 거듭제곱근(roots of unity)을 통해 이해하는 것이 가장 좋다. $\cos\frac{1}{5}\pi$는 1의 다섯제곱근, 즉 $z^5 = 1$의 해와 밀접하게 연결되어 있다. 자와 컴퍼스(ruler and compasses)로 정오각형(regular pentagon)을 작도하는 문제가 결국 $\sqrt{5}$로 귀결되는 것도 이 때문이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 아이디어를 기하학적으로 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.