풀이

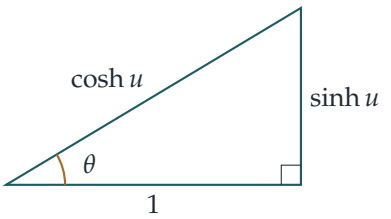
STEP III 1990, 문제 9

순수수학 • 쌍곡선 함수

> **STEP III 1990, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q9

핵심 아이디어

관계식 $\tan\theta = \sinh u$는 $\sec^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$와 같으므로, 두 변수의 삼각함수(trigonometric function)와 쌍곡선함수(hyperbolic function)는 정확히 짝을 이룬다: $\cos\theta = \operatorname{sech} u$, $\sin\theta = \tanh u$, $\sec\theta = \cosh u$. 세 변의 길이가 1, $\sinh u$, $\cosh u$인 직각삼각형을 그려 보면 이 관계를 한눈에 모두 볼 수 있다. 이 대응표만 손에 넣으면 각 소문항은 짧은 미분 계산을 한 뒤 다시 원래 변수로 옮겨 쓰는 것으로 끝난다.



풀이

풀이 전체에서 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\tan\theta \ge 0$이고, 따라서 $\sinh u \ge 0$, $u \ge 0$이다. 또한 $\cos\theta > 0$, $\cosh u > 0$이다.

소문항 (i)

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$와 $1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$를 이용하면

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u.$$

$\sec\theta$와 $\cosh u$는 모두 양수이므로 $\sec\theta = \cosh u$, 즉 $\cos\theta = \operatorname{sech} u = v$이고, 이것이 보이려던 것이다.

짝이 되는 사실도 적어 둘 만하다: $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \sinh u \operatorname{sech} u = \tanh u$.

소문항 (ii)

$\tan\theta = \sinh u$를 u에 대하여 (연쇄법칙(chain rule)을 이용한 음함수 미분(implicit differentiation)으로) 미분하면

$$\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u\cos^2\theta = \cosh u\operatorname{sech}^2 u = \operatorname{sech} u = v,$$

여기서 $\cos\theta$에 대해서는 소문항 (i)을 이용하였다.

소문항 (iii)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\cosh u = \sinh u$이므로

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\cosh u)^{-1} = -\frac{\sinh u}{\cosh^2 u} = -\operatorname{sech} u\tanh u.$$

대응표를 쓰면 $\operatorname{sech} u\tanh u = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$이므로

$$\sin 2\theta = -2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}.$$

이계도함수(second derivative)를 구할 때는 곱의 미분법(product rule)과 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u$를 함께 쓴다:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} &= -\Big[(-\operatorname{sech} u\tanh u)\tanh u + \operatorname{sech} u\cdot\operatorname{sech}^2 u\Big]\\ &= \operatorname{sech} u(\tanh^2 u - \operatorname{sech}^2 u).\end{aligned}$$

$-\cosh u$를 곱하면 $\operatorname{sech} u$가 소거된다:

$$-\cosh u\,\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} = \operatorname{sech}^2 u - \tanh^2 u = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,$$

이것이 두 번째 결과이다.

소문항 (iv)

이제 u와 v를 θ의 함수로 본다. 소문항 (i)에서 $v = \cos\theta$, $\cosh u = \sec\theta$이고, 소문항 (ii)에서 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1\big/\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = 1/v$이다($v > 0$이므로 성립한다). 따라서

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sec\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = \sec\theta\tan\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2} = -\cos\theta.$$

생각해 보기 무작정 계산에 들어가기 전에, 문제에 인쇄된 (iv)의 항등식이 정말 옳아 보이는가?

그렇지 않다. 인쇄된 대로라면 첫째 항에 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$가 있고, 그러면 좌변은

$$\begin{aligned}\sec\theta\cdot\sec\theta\tan\theta-\sin\theta\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta&=\sec^2\theta\tan\theta+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)\\&=\sec^2\theta\tan\theta+1\ \geq 1,\end{aligned}$$

이 되어 결코 0이 되지 않는다. 의도한 항등식은 첫째 항에 $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}$가 있는 것이다($v$를 u로 잘못 인쇄한 오식(misprint)이다):

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=0.$$

네 도함수를 대입하면

$$\sec\theta(-\cos\theta)+(-\sin\theta)\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta=-1-\tan^2\theta+\sec^2\theta=0,$$

이다. $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$이기 때문이다. 이로써 수정된 결과가 증명된다.

더 깔끔하게 보는 방법도 있다. 곱의 미분법에 의해 처음 두 항은 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta})$이고, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=-\sec\theta\sin\theta=-\tan\theta$이며, 그 도함수는 $-\sec^2\theta=-(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta})^2$이다.

검산

$u=\ln 2$로 잡으면 $\sinh u=\frac{3}{4}$, $\cosh u=\frac{5}{4}$이고 $\tan\theta=\frac{3}{4}$이다. 세 변이 3–4–5인 삼각형에서 $\cos\theta=\frac{4}{5}=\operatorname{sech}u$, $\sin 2\theta=\frac{24}{25}$를 얻고, 한편 $-2\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}u=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$이다. 수치적으로도 무작위로 뽑은 2000개의 점에서 유한차분(finite difference)으로 구한 도함수가 (i)–(iii)과 수정된 (iv)에 약 10^{-7} 이내로 일치하며, 인쇄된 (iv)의 좌변이 $1+\sec^2\theta\tan\theta$와 같음도 확인된다.

흔한 실수

- $\cos\theta=\pm\operatorname{sech}u$에서 양의 부호가 옳은 이유를 말하지 않고 넘어가는 것: 이를 결정하는 것은 범위 $0\leq\theta<\frac{1}{2}\pi$이다.
- $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$가 단지 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}$의 역수라는 사실을 잊고, $\operatorname{arsinh}(\tan\theta)$를 처음부터 미분하는 것.

STEP 너머

함수 $\theta(u)=\arctan(\sinh u)$는 **구더만 함수**(*Gudermannian function*)로, 복소수(complex number) 없이 원함수와 쌍곡선함수를 이어 준다. 그 역함수 $u=\ln(\sec\theta+\tan\theta)=$

$\int_0^\theta \sec t \, \mathrm{d}t$는 바로 메르카토르(Mercator) 지도의 세로 좌표이다. 같은 짝짓기는 $\cosh(\mathrm{i}x) = \cos x$라고 쓸 때에도 나타나며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 연결을 기하학적으로 살펴보기에 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.