풀이

STEP III 1990, 문제 8

순수수학 • 완전미분방정식

> **STEP III 1990, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q8

핵심 아이디어

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py' + qy)$를 전개하여 $Py'' + Qy' + Ry$와 비교한다. 그러면 p와 q가 완전히 결정되고, 조건 $P'' - Q' + R = 0$은 바로 마지막 계수가 맞아떨어지게 하는 조건이다. 주어진 미분방정식(differential equation)에서는 이 조건이 성립하므로, 한 번 적분하면 2계(second-order) 방정식이 곧바로 1계 선형(first-order linear) 방정식이 되고, 이것은 적분인자(integrating factor)로 마무리된다.

풀이

완전성 판정법(exactness criterion)

임의의 함수 p, q, y에 대하여 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py' + qy) = py'' + (p' + q)y' + q'y. \qquad (*)$$

필요성. (y에 의존하지 않는) p와 q가 모든 y에 대하여 $Py'' + Qy' + Ry$를 $(*)$와 같게 만든다고 하자. $y = 1$로 놓으면 $R = q'$이다. $y = x$로 놓으면 $Q + Rx = (p' + q) + q'x$이므로 $Q = p' + q$이다. $y = \frac{1}{2}x^2$으로 놓으면 $P + Qx + \frac{1}{2}Rx^2 = p + (p' + q)x + \frac{1}{2}q'x^2$이므로 $P = p$이다. 따라서

$$P'' - Q' + R = p'' - (p'' + q') + q' = 0.$$

충분성. $P'' - Q' + R = 0$이라 하자.

$$p = P, \qquad q = Q - P'.$$

으로 택한다. 그러면 조건을 이용하여 $p' + q = P' + Q - P' = Q$이고 $q' = Q' - P'' = R$이다. $(*)$에 의해 모든 y에 대하여 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py' + qy) = Py'' + Qy' + Ry$이므로 원하는 결과를 얻는다.

이 과정은 또한 p와 q가 반드시 P와 $Q - P'$이어야 함을 보여 준다. 아래에서도 이 방법으로 이들을 구한다.

미분방정식

여기서 $P = x - x^4$, $Q = 1 - 7x^3$, $R = -9x^2$이므로

$$P'' - Q' + R = -12x^2 - (-21x^2) - 9x^2 = 0.$$

따라서 판정법을 적용할 수 있고, $p = P = x - x^4$, $q = Q - P' = (1 - 7x^3) - (1 - 4x^3) = -3x^3$이다. 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x - x^4)y' - 3x^3 y\right] = (x^3 + 3x)\mathrm{e}^x.$$

부분적분(integration by parts)을 반복하면 $\int x^3 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\mathrm{e}^x$이고 $\int 3x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (3x - 3)\mathrm{e}^x$이므로

$$(x - x^4)y' - 3x^3 y = (x^3 - 3x^2 + 9x - 9)\mathrm{e}^x + C.$$

$x = 2$에서 $y = 2\mathrm{e}^2$, $y' = 0$이므로 좌변은 $-3 \cdot 8 \cdot 2\mathrm{e}^2 = -48\mathrm{e}^2$이고 우변은 $5\mathrm{e}^2 + C$이다. 따라서 $C = -53\mathrm{e}^2$이다.

> **생각해 보기** 좌변 $(x - x^4)y' - 3x^3 y$는 $(x - x^4)y$의 도함수가 아니다. 두 번째 적분은 어떻게 할까?

x를 묶어 내면 좌변은 $x[(1 - x^3)y' - 3x^2 y] = x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1 - x^3)y]$이다. (이것은 통상의 적분인자이다. $y' - \frac{3x^2}{1-x^3}y$의 적분인자는 $\exp\int \frac{-3x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = 1 - x^3$이다.) 해가 $x = 2$ 근처에서 정의되므로 x로 나누어도 되고, 그러면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1 - x^3)y] = (x^2 - 3x + 9)\mathrm{e}^x - \frac{9\mathrm{e}^x}{x} - \frac{53\mathrm{e}^2}{x}.$$

다시 부분적분하면 $\int (x^2 - 3x + 9)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x^2 - 5x + 14)\mathrm{e}^x$이다. 항 e^x/x는 초등함수인 역도함수(antiderivative)를 갖지 않으므로, 출발점 $x = 2$부터의 적분으로 남겨 둔다.

$$(1 - x^3)y = (x^2 - 5x + 14)\mathrm{e}^x - 53\mathrm{e}^2 \ln\frac{x}{2} - 9\int_2^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t + D.$$

$x = 2$에서 좌변은 $-7 \cdot 2\mathrm{e}^2 = -14\mathrm{e}^2$이고 우변은 $8\mathrm{e}^2 + D$이므로 $D = -22\mathrm{e}^2$이다. 따라서

$$\boxed{y = \frac{1}{1 - x^3}\left[(x^2 - 5x + 14)\mathrm{e}^x - 22\mathrm{e}^2 - 53\mathrm{e}^2 \ln\frac{x}{2} - 9\int_2^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\right]}$$

이고, 이는 $x > 1$에서 성립한다. y''의 계수 $x - x^4$는 $x = 1$에서 0이 되므로, $x = 2$를 지나는 해는 $x > 1$에서 정의되며 $x = 1$ 너머로 확장될 필요가 없다.

검산

- $x = 2$에서 대괄호 안은 $8e^2 - 22e^2 = -14e^2$이고, 이를 $1 - 8 = -7$로 나누면 $y = 2e^2$이 되어 조건과 맞는다.
- 원래 방정식을 $x = 2$부터 수치적으로 풀면(4차 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) $y(3) \approx 7.90306$을 얻는데, 이는 적분을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산한 공식의 값과 일치한다. 두 값은 $x = 1.2, 1.5, 4$에서도 일치한다.
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x - x^4)y' - 3x^3y\right]$를 전개하면 다시 $(x - x^4)y'' + (1 - 7x^3)y' - 9x^2y$가 나온다.

흔한 실수

- 첫 번째 적분 후 상수 C를 빠뜨리는 것. 여기서는 이 상수가 0이 아니며, 로그항을 만들어 낸다.
- $\int e^x/x\,\mathrm{d}x$를 억지로 닫힌 형태로 구하려는 것. 이는 불가능하므로 아래끝이 2인 정적분(definite integral)으로 남겨 두어야 하며, 그렇게 하면 초기조건(initial condition)을 적용하기도 쉽다.

STEP 너머

완전한 도함수가 되는 식 $Py'' + Qy' + Ry$를 **완전**(*exact*)하다고 한다. 식 $P'' - Q' + R$는 **수반**(*adjoint*) 방정식 $(Pz)'' - (Qz)' + Rz = 0$의 좌변에 $z = 1$을 대입한 값이다. 일반적으로 수반 방정식의 임의의 해 z는 $z(Py'' + Qy' + Ry)$를 완전하게 만드는 적분인자이다. 수반 방정식은 자기수반(self-adjoint) 문제(슈투름-리우빌(Sturm–Liouville) 문제)와 그린 함수(Green's function)로 이어진다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 2계 선형 방정식에 관한 연습문제에서 완전 방정식과 수반 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.