풀이

STEP III 1990, 문제 7

순수수학 • 음함수 곡선 그리기

STEP III 1990, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q7

핵심 아이디어

음함수 미분(implicit differentiation)을 두 번 하면 각 점에서 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$와 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$를 얻는데, 이것이 바로 테일러 급수(Taylor series)의 계수이다. 부등식에서는 이 방정식이 y에 대한 **이차식**(*quadratic*)일 뿐이라는 점을 알아차리는 것이 요령이다. 점 (x,y)가 존재하려면 그 이차식이 실근을 가져야 하므로, 판별식(discriminant)이 음이 아니어야 한다. 그다음 이차방정식을 직접 풀면 곡선 전체의 모습이 드러난다. 곡선은 두 갈래로 이루어져 있고, 두 갈래는 판별식이 0이 되는 곳에서 만난다.

풀이

이 풀이 전체에서 $F(x,y) = xy^2 + x^3 + a^2y - a^3$으로 둔다. 대입해 보면 P, Q, R에서 $F = 0$임을 알 수 있다. 예를 들어 R에서는 $a \cdot a^2 + a^3 - a^3 - a^3 = 0$이다.

P, Q, R에서의 테일러 급수

y를 x의 함수로 보고 $F(x,y) = 0$을 x에 대하여 미분하면

$$y^2 + 2xyy' + 3x^2 + a^2y' = 0, \qquad \text{따라서} \qquad y' = -\frac{y^2 + 3x^2}{2xy + a^2}.$$

첫 번째 식을 다시 미분하면(항 $2xyy'$에서 $2yy' + 2xy'^2 + 2xyy''$가 나온다)

$$4yy' + 2xy'^2 + 6x + (2xy + a^2)\,y'' = 0.$$

각 점에서 분모 $2xy + a^2$가 0이 아니므로, 이 식들로부터 y'와 y''가 정해지고, 그러면 $y = y_0 + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \cdots$이다.

$P(0,a)$**에서:** $y' = -a^2/a^2 = -1$이다. 그러면 $4a(-1) + a^2y'' = 0$이므로 $y'' = 4/a$이고

$$y = a - h + \frac{2}{a}h^2 + \cdots.$$

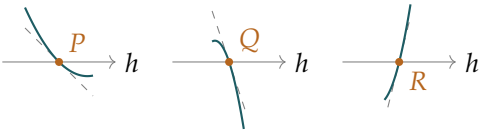
$Q(a,0)$**에서:** $y' = -3a^2/a^2 = -3$이다. 그러면 $0 + 2a(9) + 6a + a^2y'' = 0$이므로 $y'' = -24/a$이고

$$y = -3h - \frac{12}{a}h^2 + \cdots.$$

$R(a,-a)$**에서:** 여기서는 $2xy + a^2 = -a^2$이므로 $y' = -4a^2/(-a^2) = 4$이다. 그러면 $4(-a)(4) + 2a(16) + 6a - a^2y'' = 0$, 즉 $22a = a^2y''$이므로 $y'' = 22/a$이고

$$y = -a + 4h + \frac{11}{a}h^2 + \cdots.$$

따라서 P 근처에서 곡선은 기울기 -1로 내려가며 아래로 볼록(concave up)하다(접선(tangent)보다 위쪽으로 휜다). Q 근처에서는 기울기 -3으로 가파르게 내려가며 위로 볼록(concave down)하다. R 근처에서는 기울기 4로 올라가며 아래로 볼록하다.



($a = 1$일 때의 국소적인 모양이다. 점선은 접선이다.)

부등식

C의 방정식을 y에 대한 이차식으로 쓰면

$$x\,y^2 + a^2\,y + (x^3 - a^3) = 0.$$

$x \neq 0$이고 (x,y)가 C 위에 있으면 이 이차식은 실근 y를 가지므로 판별식이 음이 아니다.

$$a^4 - 4x(x^3 - a^3) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^4 - 4a^3x - a^4 \leq 0.$$

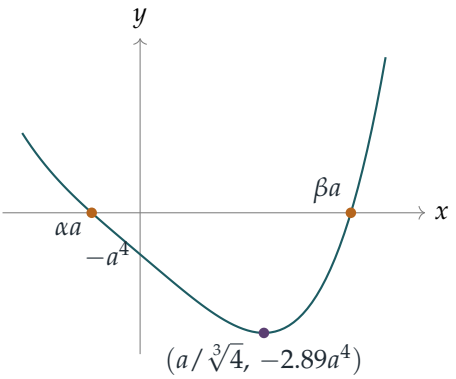
$x = 0$이면 좌변은 $-a^4 < 0$이므로 이 경우에도 부등식이 성립한다. 이로써 결과가 증명된다.

$y = 4x^4 - 4a^3x - a^4$**의 그래프**

문제지에는 $4x^4 - 4a^3 - a^4$로 인쇄되어 있는데, 이는 방금 만난 사차식(quartic) $g(x) = 4x^4 - 4a^3x - a^4$의 오식임이 분명하다. $g(0) = -a^4$이고 $g'(x) = 16x^3 - 4a^3$인데, 이는 $x_0 = a/\sqrt[3]{4} \approx 0.63a$에서만 0이 되며, 이곳에서 g는 최솟값을 가진다. $x_0^3 = a^3/4$를 이용하면

$$g(x_0) = a^3x_0 - 4a^3x_0 - a^4 = -a^4(1 + 3 \cdot 4^{-1/3}) \approx -2.89a^4.$$

$x \to \pm\infty$일 때 $g \to +\infty$이고 g는 감소하다가 증가하므로, g는 정확히 두 개의 영점 $x = \alpha a$와 $x = \beta a$를 가진다. 여기서 $\alpha \approx -0.246$과 $\beta \approx 1.072$는 $4t^4 - 4t - 1 = 0$의 근이다(깔끔한 닫힌 꼴은 없으며, 필요하지도 않다). 또한 $g''(x) = 48x^2 \geq 0$이므로 그래프는 볼록(convex)하다.



($a = 1$로 그렸다.) 따라서 C 위의 모든 점은 $\alpha a \leq x \leq \beta a$를 만족한다. 즉 곡선은 세로 띠 안에 놓여 있다.

곡선 C

$x \neq 0$일 때 이차방정식을 풀면 두 갈래

$$y_\pm = \frac{-a^2 \pm \sqrt{D}}{2x}, \qquad D = a^4 + 4a^3x - 4x^4,$$

를 얻는다. 이들은 정확히 그 띠 위에서 실수이고, $D = 0$인 곳, 즉 $x = \alpha a$와 $x = \beta a$에서 만난다. 그곳에서 $y = -a^2/(2x)$이고, 접선은 수직이다. 그곳이 바로 y'의 분모 $2xy + a^2$가 0이 되는 곳이기 때문이다. 이로부터 점 $(\beta a, -0.47a)$와 $(\alpha a, 2.03a)$를 얻는다.

? **생각해 보기** $x \to 0$일 때 두 갈래는 어떻게 되는가?

분자와 분모에 $\sqrt{D} + a^2$를 곱하고 $D - a^4 = 4x(a^3 - x^3)$을 이용하면

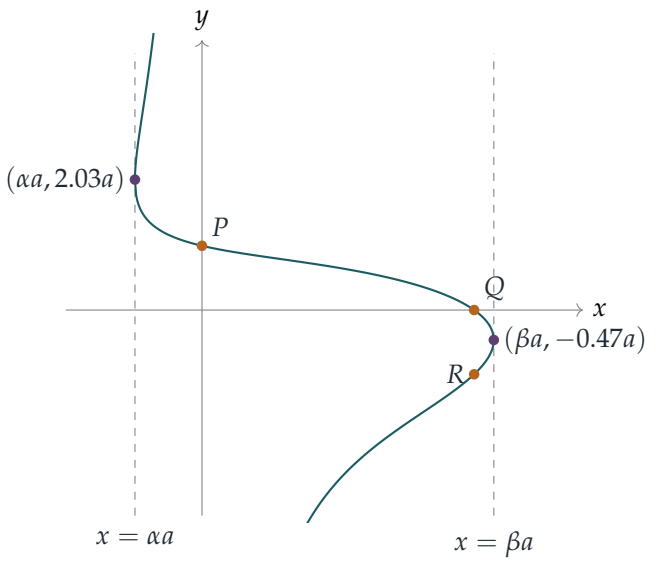
$$y_+ = \frac{2(a^3 - x^3)}{a^2 + \sqrt{D}},$$

를 얻는다. 이는 $x = 0$에서 아무 문제 없이 정의되며 그곳에서 값은 a이다. 따라서 y_+는 P를 지나는 하나의 매끄러운 갈래이다. 다른 갈래는 작은 x에 대하여 $y_- \approx -a^2/x$를 만족하므로, $x \to 0^+$일 때 $y_- \to -\infty$이고 $x \to 0^-$일 때 $y_- \to +\infty$이다. 이것이 y축을 따라 놓인 점근선(asymptote)이다.

개형을 확정하는 데 도움이 되는 사실이 몇 가지 더 있다.

- 수평 접선은 없다. $y' = 0$이 되려면 $y^2 + 3x^2 = 0$, 즉 $(0,0)$이어야 하는데, 이 점은 C 위에 있지 않다.
- 곡선은 $x^3 = a^3$인 곳, 즉 Q에서만 $y = 0$과 만나고, P에서만 $x = 0$과 만난다.
- $x = a$에서 $D = a^4$이므로 $y_+ = 0$(점 Q)이고 $y_- = -a$(점 R)이다.

이를 종합하면 C는 연결된 하나의 곡선이다. 곡선은 y축 바로 왼쪽에서 $+\infty$로부터 y_-를 따라 내려와 $(\alpha a, 2.03a)$의 수직 접선에 이른다. 거기서 방향을 바꾸어 y_+를 따라 P를 지나고(기울기 -1), Q를 지나 내려가서(기울기 -3) $(\beta a, -0.47a)$의 수직 접선에 이른다. 그다음 다시 방향을 바꾸어 y_-를 따라 R을 지나고(기울기 4), y축 바로 오른쪽에서 $-\infty$로 내려간다. P에서는 아래로 볼록하고 Q에서는 위로 볼록하므로, 그 사이에 변곡점(point of inflection)이 있다.



($a = 1$로 그렸다. 점선은 앞에서 구한 띠의 경계이다.)

검산

- $a = 1.7$로 두고, 각 점 근처의 $x = x_0 + h$에서 이차방정식을 풀어 y를 구했다. h를 절반으로 줄일 때마다 두 항까지의 테일러 급수 각각의 오차가 약 8배씩 줄었는데, 이는 예상대로 h^3의 거동이다.
- x의 무작위 값 10^5개를 택했을 때, 이차방정식은 정확히 $4x^4 - 4a^3x - a^4 \leq 0$일 때 실근을 가졌다.

- 이분법(bisection)으로 $\alpha \approx -0.2463$과 $\beta \approx 1.0724$를 얻는다. $x = \pm 0.001$에서($a = 1.7$일 때) 한 근은 a에 가깝고 다른 근은 $-a^2/x \approx \mp 2890$에 가깝다.

흔한 실수

- 인수 $\frac{1}{2}$를 빠뜨리는 것. h^2의 계수는 y''가 아니라 $\frac{1}{2}y''$이다.
- $x = 0$인 경우를 따로 확인하지 않고 판별식을 쓰기 위해 x로 나누는 것.
- y_+가 P를 매끄럽게 지난다는 점을 놓치는 것. $(-a^2 + \sqrt{D})/(2x)$로 쓰면 $x = 0$에서 특이점이 있는 것처럼 보이지만 실제로는 그렇지 않다.

STEP 너머

여기서는 음함수로 정의된 함수의 테일러 전개로부터 한 점 근처에서 곡선의 거동을 알아냈다. $\partial F/\partial y \neq 0$인 곳이면 어디서나 y가 x의 매끄러운 함수임을 보장하는 정리가 **음함수 정리**(*implicit function theorem*)로, 다변수 해석학(multivariable analysis)의 핵심 결과이다. 띠의 양 끝에 있는 수직 접선은 정확히 $\partial F/\partial y = 2xy + a^2$가 0이 되는 점들이다. 이 곡선은 평면 위의 삼차 곡선(cubic)이며, 이러한 곡선에 대한 연구는 대수기하학(algebraic geometry)과 타원곡선(elliptic curves)으로 이어진다. 이런 유형의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.