풀이

STEP III 1990, 문제 6

순수수학 • 선형 변환과 타원

> **STEP III 1990, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.2 절 **돌지 않고 늘어나기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/eigenvectors.html

핵심 아이디어

두 특별한 벡터는 행렬의 고유벡터(eigenvector)이며, 이것이 기하학적 구조 전체를 알려준다. T는 한 직선 방향으로 어떤 배율만큼, 그와 수직인 직선 방향으로 또 다른 배율만큼 늘이므로, 단위원(unit circle)은 그 두 직선을 축으로 하는 타원(ellipse)이 된다. 대수적으로는 T의 역변환을 구하여 x와 y를 X와 Y로 나타낸 뒤 $x^2 + y^2 = 1$에 대입하는 것이 E의 방정식을 얻는 가장 깔끔한 방법이다. 넓이는 행렬식(determinant)만큼 배가 되며, T는 직선을 직선으로 옮기므로 E의 접선(tangent)은 단순히 C의 접선의 상이다.

풀이

$M = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$로 두면, T는 M을 곱하는 변환이다.

두 특별한 방향

다음을 계산한다.

$$M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$
$$M\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}18+2\\-4-6\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

따라서 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$는 방향을 유지한 채 2배가 되고, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$는 방향을 유지한 채 4배가 되므로, 요구된 결과가 성립한다. $1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0$이므로 이 두 방향이 서로 수직이라는 점에 주목하자.

E의 방정식

M의 행렬식은

$$\det M = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 (9\cdot 6 - (-2)(-2)) = \tfrac{4}{25}\cdot 50 = 8,$$

이고 이는 0이 아니므로 T는 역변환을 가지며, 역행렬(inverse matrix)은

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 9\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 9\end{pmatrix}.$$

이다. 따라서 점 (X,Y)가 (x,y)의 상일 필요충분조건은

$$x = \frac{3X+Y}{10}, \qquad y = \frac{2X+9Y}{20}.$$

이다. 점 (X,Y)가 E 위에 있을 필요충분조건은 그 점의 원래 점이 C 위에 있는 것, 즉 $x^2+y^2=1$이다. 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{(3X+Y)^2}{100} + \frac{(2X+9Y)^2}{400} = 1 &\iff 4(9X^2+6XY+Y^2) + (4X^2+36XY+81Y^2) = 400\\ &\iff 40X^2+60XY+85Y^2 = 400\\ &\iff 8X^2+12XY+17Y^2 = 80,\end{aligned}$$

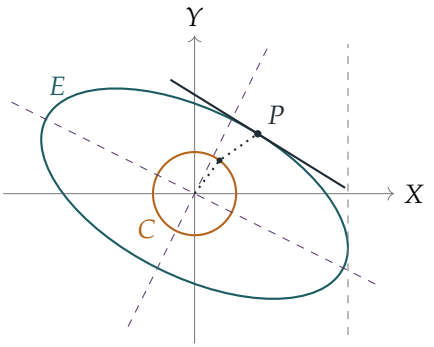
이고, 이것이 구하는 E의 방정식이다.

넓이

선형사상(linear map)은 모든 넓이를 $|\det M|$배 한다. C로 둘러싸인 원판의 넓이는 π이므로, E로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$8\pi.$$

이다. 이는 기하학적 관찰과도 일치한다. E는 반축의 길이가 $2(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 방향)와 $4(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 방향)인 타원이며, $\pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi$이다.



그림은 C, 축(점선)과 함께 그린 타원 E, E에 접하는 수직선 $X = 2\sqrt{17/5}$, 그리고 $\frac{1}{5}(3,4)$의 상인 P에서의 접선을 보여 준다.

X의 최댓값

E의 방정식을 Y에 대한 이차방정식(quadratic equation)으로 보자.

$$17Y^2 + 12XY + (8X^2 - 80) = 0.$$

주어진 X의 값이 E 위에 나타날 필요충분조건은 이 방정식이 실근 Y를 갖는 것, 즉 판별식(discriminant)이 음이 아닌 것이다.

$$\begin{aligned} 144X^2 - 4 \cdot 17(8X^2 - 80) \geq 0 &\iff 144X^2 - 544X^2 + 5440 \geq 0 \\ &\iff 400X^2 \leq 5440 \\ &\iff X^2 \leq \tfrac{68}{5}. \end{aligned}$$

따라서 E 위의 모든 점은 $X \leq \sqrt{68/5} = 2\sqrt{17/5}$를 만족하고, 등호가 성립하는 점이 존재한다(이때 판별식은 0이며, $Y = -\frac{6X}{17}$인 한 점이 나온다). 그러므로 E 위에서 X의 최댓값은 $2\sqrt{17/5}$이며, 요구된 결과가 성립한다.

? 생각해 보기 판별식을 쓰지 않고 원에서 바로 이 결과를 알아낼 방법이 있을까?

있다. E 위에서 $x^2 + y^2 = 1$일 때 $X = \frac{2}{5}(9x - 2y)$이다. $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$로 두면, 식 $9\cos\theta - 2\sin\theta$의 최댓값은 $\sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}$이다($R\cos(\theta + \alpha)$ 꼴로 합성). 따라서 X의 최댓값은 $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{85/25} = 2\sqrt{17/5}$이고, 위의 결과와 일치한다.

접선

C 위의 점 $\frac{1}{5}(3,4)$는 다음 점으로 옮겨진다.

$$P = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9\cdot\frac{3}{5} - 2\cdot\frac{4}{5} \\ -2\cdot\frac{3}{5} + 6\cdot\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{25} \\ \frac{36}{25} \end{pmatrix}.$$

$\frac{1}{5}(3,4)$에서 C의 접선은 그 점에서의 반지름과 수직이므로

$$3x + 4y = 5.$$

이다. T는 선형이고 역변환을 가지므로 직선을 직선으로 옮기며, C와 정확히 한 점에서 만나는 직선은 E와 정확히 한 점에서 만나는 직선으로 옮겨진다. 따라서 P에서 E의 접선은 이 직선의 상이다. $x = \frac{3X+Y}{10}$과 $y = \frac{2X+9Y}{20}$를 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{3(3X+Y)}{10} + \frac{4(2X+9Y)}{20} = 5 &\iff 6(3X+Y) + 4(2X+9Y) = 100 \\ &\iff 26X + 42Y = 100, \end{aligned}$$

이므로 P에서 E의 접선은

$$13X + 21Y = 50.$$

이다. 확인해 보면 $13\cdot\frac{38}{25} + 21\cdot\frac{36}{25} = \frac{494+756}{25} = 50$이므로 P는 이 직선 위에 있다. 다른 방법으로, $8X^2 + 12XY + 17Y^2 = 80$을 음함수 미분(implicit differentiation)하면 P에서의 법선(normal)은 $(16X + 12Y,\ 12X + 34Y) = \frac{1}{25}(1040,\ 1680)$ 방향이고, 이는 $(13,21)$과 평행하므로 같은 직선을 얻는다.

검산

- $(1,0)$의 상은 $\frac{2}{5}(9,-2)$이고, $\frac{4}{25}\left(8\cdot 81 - 12\cdot 18 + 17\cdot 4\right) = \frac{4}{25}\cdot 500 = 80$이므로 이 점은 E 위에 있다.
- 축의 끝점 $\pm 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$와 $\pm 4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$는 E의 방정식을 만족한다. 예를 들어 $\frac{4}{5}(8 + 24 + 68) = 80$이다.
- 수치적으로 C 위의 점 200 000개를 표본으로 잡으면 X의 최댓값은 $X \approx 3.687818$로 $2\sqrt{17/5} \approx 3.687818$과 일치하며, 상으로 얻은 다각형의 넓이를 신발끈 공식(shoelace formula)으로 구하면 $25.13274 \approx 8\pi$이다.

흔한 실수

- $x^2 + y^2 = 1$에 대입할 때 M^{-1} 대신 M을 적용하는 실수: 상으로 얻은 곡선의 방정식을 구하려면 옛 좌표를 새 좌표로 나타내야 한다.

- 행렬식을 계산할 때 인수 $\frac{2}{5}$를 빠뜨리는 실수: 이 인수는 $\frac{2}{5}$가 아니라 $\left(\frac{2}{5}\right)^2$만큼 기여한다.
- 상인 점 P를 구한 뒤, E의 접선에 $\frac{1}{5}(3,4)$에서의 C의 기울기를 그대로 쓰는 실수: 선형사상은 접한다는 성질은 보존하지만 기울기는 보존하지 않는다.

STEP 너머

여기서의 행렬은 대칭행렬(symmetric matrix)이며, 그 때문에 고유벡터들이 서로 수직이다. 이것은 모든 실대칭행렬이 회전에 의해 대각화(diagonalise)될 수 있다는 스펙트럼 정리(spectral theorem)의 2차원 경우이다. 이 정리는 임의의 이차형식(quadratic form) $ax^2 + 2hxy + by^2$가 서로 수직인 주축(principal axes)을 갖는 이차곡선(conic)을 나타내는 이유를 설명해 주며, 그 이차형식의 행렬의 고윳값(eigenvalue)을 보면 곡선의 모양을 곧바로 알 수 있다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 풍부한 기하학적 그림과 함께 고윳값, 대칭행렬, 이차형식을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.