풀이

STEP III 1990, 문제 5

순수수학 • 라이프니츠 정리

STEP III 1990, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q5

핵심 아이디어

파스칼 법칙(Pascal's rule)은 두 항을 공통분모(common denominator)로 통분하고 나면 계승이 들어 있는 분수 계산에 지나지 않는다. 곱의 n계 도함수에 대한 라이프니츠(Leibniz) 공식은 n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로 증명한다. n계 공식을 한 번 더 미분하면 각 혼합항이 두 번씩 나타나고, 그 두 항을 하나로 합쳐 주는 것이 바로 파스칼 법칙이다. 마지막 부분에서 $y = \sin^{-1} x$를 직접 n번 미분하는 것은 가망이 없다. 그 대신 y가 만족하는 간단한 2계 방정식을 찾고, 거기에 라이프니츠 공식을 적용한다.

(인쇄된 문제에는 $y = \sin^{-1} y$라고 되어 있다. 이는 분명히 $y = \sin^{-1} x$의 오식이며, 여기서는 이것을 사용한다.)

풀이

파스칼 법칙

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$이고 $0! = 1$임을 떠올리자. $1 \le r \le n$이면 $r-1$과 $n-r$이 모두 음이 아니므로, 아래의 모든 계승이 의미를 가진다. $r! = r\,(r-1)!$이고 $(n-r+1)! = (n-r+1)\,(n-r)!$이므로 공통분모는 $r!\,(n-r+1)!$이다.

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n-r+1)}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{n!\,r}{r!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n+1-r)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r}.\end{aligned}$$

라이프니츠 공식

u와 v는 필요한 만큼 여러 번 미분할 수 있다고 가정한다. 합의 기호로 쓰면 증명할 명제는

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r)}$$

이고, 여기서 $z^{(0)}$은 z 자신을 뜻한다. 이를 $n \geq 1$에 대한 수학적 귀납법으로 증명한다.

기저 단계 $n = 1$**.** 우변은 $u^{(1)}v + uv^{(1)}$이고, 곱의 미분법(product rule)에 의해 이는 $(uv)'$이다.

귀납 단계. 어떤 $n \geq 1$에 대하여 공식이 성립한다고 하자. 각 항에 곱의 미분법을 써서 이를 미분하면

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r+1)}.$$

두 번째 합에서 $s = r + 1$로 놓으면 이 합은 $\sum_{s=1}^{n+1} \binom{n}{s-1} u^{(n+1-s)} v^{(s)}$가 된다. 이제 두 합은 모두 $u^{(n+1-r)}v^{(r)}$ 꼴의 항으로 이루어진다. 첫 번째 합의 $r = 0$인 항과 두 번째 합의 $s = n + 1$인 항을 따로 떼어 내면

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \right] u^{(n+1-r)} v^{(r)} + uv^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)}v + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} + uv^{(n+1)}\end{aligned}$$

이다. 여기서 $1 \leq r \leq n$이므로 파스칼 법칙을 적용할 수 있다. $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$이므로 이는

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)}$$

이고, 이것이 $n + 1$에 대한 공식이다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 공식은 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립한다.

$\sin^{-1} x$의 도함수

$-1 < x < 1$에서 $y = \sin^{-1} x$라 하자. 그러면

$$y^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \text{따라서} \qquad (1 - x^2)(y^{(1)})^2 = 1.$$

이 식을 x에 대하여 미분하면

$$(1 - x^2) \cdot 2y^{(1)}y^{(2)} - 2x(y^{(1)})^2 = 0.$$

$(-1,1)$에서 $y^{(1)} > 0$이므로 $2y^{(1)}$로 나눌 수 있다.

$$(1-x^2)\,y^{(2)} - x\,y^{(1)} = 0. \qquad (*)$$

이것이 $n=0$일 때 증명해야 할 결과이다.

> **생각해 보기** $(1-x^2)^{-1/2}$을 그냥 미분하지 않고, 왜 $y^{(1)}$을 먼저 제곱한 뒤 미분할까?

$(1-x^2)^{-1/2}$을 직접 미분하면 $y^{(2)} = x(1-x^2)^{-3/2}$이고, 여기에 $1-x^2$을 곱해도 똑같이 $(*)$를 얻는다. 어느 방법이든 된다. 요점은 계수가 x에 대한 **다항식**(polynomial)이고 y의 도함수에 대하여 **선형**(linear)인 방정식에 도달하는 것이다. 라이프니츠 공식이 깔끔하게 다룰 수 있는 것이 바로 이런 방정식이기 때문이다. 다항식 계수는 몇 번 미분하면 곧 0이 된다.

이제 $n \geq 1$에 대하여 $(*)$를 n번 미분하면서 각 곱에 라이프니츠 공식을 적용한다. 첫 번째 곱에서는 $u = y^{(2)}$, $v = 1-x^2$으로 놓는다. 그러면 $v^{(1)} = -2x$, $v^{(2)} = -2$이고 그보다 높은 계의 도함수는 모두 0이므로 세 항만 남는다.

$$\left((1-x^2)\,y^{(2)}\right)^{(n)} = (1-x^2)\,y^{(n+2)} + \binom{n}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\,y^{(n)}.$$

($n=1$일 때는 마지막 항이 없는데, 이는 $\binom{1}{2} = 0$과 일치한다.) 두 번째 곱에서는 $u = y^{(1)}$, $v = x$로 놓으면 두 항만 남는다.

$$\left(x\,y^{(1)}\right)^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)}.$$

두 식을 빼면 $(*)$의 n계 도함수는

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)} - x\,y^{(n+1)} - n\,y^{(n)} = 0.$$

항을 정리하면 $-2nx - x = -(2n+1)x$이고 $-n(n-1) - n = -n^2$이므로

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)x\,y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0$$

이 되어 증명이 끝난다. 이 식은 모든 $n \geq 0$과 $(-1,1)$의 모든 x에 대하여 성립한다.

검산

- 라이프니츠 공식에서 $n = 1$로 놓으면 곱의 미분법이 나온다. $n = 2$이면 $(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$이고, 이는 $u'v + uv'$을 미분하여 확인할 수 있다.
- $x = 0$에서 최종 결과는 $y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0)$이 된다. $y^{(1)}(0) = 1$이므로 $y^{(3)}(0) = 1$, $y^{(5)}(0) = 9$이고, 따라서 매클로린 급수(Maclaurin series)는 $x + \frac{x^3}{6} + \frac{9x^5}{120} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}$으로 시작한다. 이는 $\sin^{-1} x$의 알려진 급수와 같다.

- 수치적으로도 확인하였다. 파스칼 법칙은 모든 $n < 60$에 대하여, 라이프니츠 공식은 무작위로 고른 다항식 쌍 300개에 대하여 정확하게, 최종 항등식은 $(1-x^2)^{-1/2}$의 테일러 계수(Taylor coefficients)를 이용하여 $(-1, 1)$의 여섯 점에서 n이 27까지일 때 확인하였다. 상대 잔차는 10^{-15}보다 작았다.

흔한 실수

- 귀납 단계에서 두 번째 합의 첨자를 바꾼 뒤 이항계수(binomial coefficient)를 잘못 쓰는 것. 파스칼 법칙을 적용하기 전에 $r = 0$과 $r = n + 1$인 양 끝 항을 따로 써 두자.
- 먼저 방정식 $(*)$를 찾지 않고 $\sin^{-1} x$를 직접 n번 미분하려 하는 것.
- $1 - x^2$을 미분할 때 인수 $\binom{n}{2}$나 음의 부호를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

다항식 계수를 갖는 선형 미분방정식을 찾은 뒤 그것을 n번 미분하는 기법은 테일러 계수에 대한 점화식(recurrence)을 얻는 표준적인 방법이다. 이는 곧바로 상미분방정식(ODE)의 거듭제곱급수 해법(power-series solutions)으로 이어지며, 르장드르(Legendre) 함수와 베셀(Bessel) 함수가 바로 이렇게 생겨난다. 라이프니츠 공식은 이항정리(binomial theorem)의 미적분판이기도 하다. $u = e^{ax}$, $v = e^{bx}$로 놓으면 이 공식은 $(a+b)^n = \sum \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$이 된다. 급수해에 대해 더 알고 싶다면 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.