풀이

STEP III 1990, 문제 4

순수수학 • 삼각급수

> **STEP III 1990, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q4

핵심 아이디어

두 급수(series)는 모두 각이 일정한 간격으로 커지는 코사인들의 합이므로, 자연스럽게 떠오르는 도구가 두 가지 있다. 단순한 합에는 $2\sin\beta$를 곱하고 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)을 쓴다. 그러면 각 항이 두 사인의 차로 쪼개지고 합이 연쇄적으로 소거된다(telescoping). 이항계수가 붙은 합과 마지막 항등식에서는 $\cos\phi$를 $e^{i\phi}$의 실수부(real part)로 생각한다. 그러면 이항정리(binomial theorem)나 등비급수(geometric series)의 합 공식이 일을 대신해 주고, 마지막에 실수부나 허수부(imaginary part)를 취하면 답이 나온다.

풀이

첫 번째 급수

이 합을 S라 하자. 곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\sin A\cos B = \sin(B+A) - \sin(B-A)$에 의해

$$2\sin\beta\cos(\alpha+2r\beta) = \sin(\alpha+(2r+1)\beta) - \sin(\alpha+(2r-1)\beta).$$

이것을 $r = 0, 1, \ldots, n$에 대해 더하면 합이 연쇄적으로 소거된다. r일 때의 첫 번째 사인이 $r+1$일 때의 두 번째 사인과 상쇄되기 때문이다. 따라서 두 항만 남는다.

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\, S &= \sin(\alpha+(2n+1)\beta) - \sin(\alpha-\beta) \\ &= 2\cos(\alpha+n\beta)\sin((n+1)\beta), \end{aligned}$$

여기서 $\frac{P+Q}{2} = \alpha + n\beta$, $\frac{P-Q}{2} = (n+1)\beta$로 두고 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$를 이용하였다. $\sin\beta \neq 0$이므로 양변을 나눌 수 있고,

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} \cos(\alpha + 2r\beta) = \frac{\sin(n+1)\beta\,\cos(\alpha+n\beta)}{\sin\beta}}$$

$\alpha + n\beta$가 첫 번째 각과 마지막 각의 평균이라는 점에 주목하자. 이는 식의 꼴이 맞는지 확인하는 좋은 검증 수단이다.

이항급수

이 합을 T라 하자. $\cos\phi = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$이고 이항계수는 실수이므로, 이항정리에 의해

$$T = \mathrm{Re}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta})^r = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta})^n\right]$$

이다. 이제 "반각" 인수를 묶어 낸다.

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}) = 2\cos\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}.$$

따라서 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta})^n = 2^n\cos^n\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+n\beta)}$이고, $2^n\cos^n\beta$는 실수이므로

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos(\alpha+2r\beta) = 2^n\cos^n\beta\,\cos(\alpha+n\beta)}$$

(이 결과는 사실 $\sin\beta \neq 0$이라는 조건이 필요 없다.)

마지막 항등식

시컨트(secant)가 있으므로 $\cos\theta \neq 0$이어야 하며, 이는 문제에 암묵적으로 포함되어 있다. $\sec^r\theta$는 실수이므로 r번째 항은 $\cos r\theta\,\sec^r\theta = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sec\theta)^r$이다. 그러므로

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sec\theta = \frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta} = 1 + \mathrm{i}\tan\theta.$$

로 두자. 좌변은 $\mathrm{Re}(1 + w + \cdots + w^n)$이다.

> **생각해 보기** 여기서 등비급수의 합 공식을 써도 되는 이유는 무엇이며, w는 왜 도움이 되는가?

이 공식을 쓰려면 $w \neq 1$이어야 하는데, $\sin\theta \neq 0$이기 때문에 바로 $w - 1 = \mathrm{i}\tan\theta \neq 0$이다. 조건이 쓰이는 곳이 바로 여기이다. w의 장점은 $w-1$이 순허수여서 그것으로 나누기가 쉽고, 한편 w^{n+1}은 지수 형태 $w = \sec\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$로부터 쉽게 계산된다는 것이다. $t = \tan\theta$라 쓰면

$$1 + w + \cdots + w^n = \frac{w^{n+1}-1}{w-1} = \frac{\sec^{n+1}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} - 1}{\mathrm{i}t}.$$

임의의 복소수 z와 실수 $t \neq 0$에 대해 $\operatorname{Re}\dfrac{z}{\mathrm{i}t} = \operatorname{Re}\dfrac{-\mathrm{i}z}{t} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{t}$이다. 분자의 -1은 허수부가 0이므로

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta \, \sec^r\theta = \frac{\sec^{n+1}\theta \, \sin(n+1)\theta}{\tan\theta} = \sec^{n+1}\theta \, \sin(n+1)\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin(n+1)\theta \, \sec^n\theta}{\sin\theta},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

앞부분과의 연결. 양변에 $\cos^n\theta$를 곱하면 이 항등식은

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta \cos^{n-r}\theta = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

라는 뜻이 된다. 이 꼴은 n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로도 증명할 수 있다. 좌변을 C_n이라 하면 $C_n = \cos\theta \, C_{n-1} + \cos n\theta$이고, $\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta \sin\theta = \sin(n+1)\theta$로 귀납 단계가 마무리된다.

검산

- $n = 0$: 세 공식 모두 단 하나뿐인 첫 항$(\cos\alpha, \cos\alpha, 1)$이 된다.
- 첫 번째 합에서 $\beta \to 0$이면 $\frac{\sin(n+1)\beta}{\sin\beta} \to n+1$이므로 $S \to (n+1)\cos\alpha$이고, 이는 같은 항 $n+1$개의 합으로서 옳다. 두 번째 합에서 $\beta = 0$이면 $\sum \binom{n}{r} = 2^n$이므로 $2^n\cos\alpha$가 된다.
- $\theta = \pi/4$, $n = 2$: 좌변은 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + 0 = 2$이고, 우변은 $\sin\frac{3\pi}{4} \cdot 2 / \sin\frac{\pi}{4} = 2$이다.
- 수치적으로도 α, β, θ와 $n \leq 15$를 무작위로 20 000번 골랐을 때 세 공식 모두 직접 더한 값과 (상대오차) 10^{-9} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- 첫 번째 급수의 항이 $n+1$개($r = 0$부터 n까지)라는 것을 잊어서 $\sin(n+1)\beta$ 대신 $\sin n\beta$를 얻는 실수.
- $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}$를 $2\cos\beta$로 써서 인수 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$를 잃어버리는 실수. 이렇게 하면 답의 각이 어긋난다.
- 마지막 부분에서 분자와 분모의 실수부를 따로따로 취하는 실수. 먼저 분모를 실수로 만들어야 한다.

STEP 너머

cos를 지수함수의 실수부로 쓰면 삼각함수의 합이 등비급수나 이항급수의 합으로 바뀐다. 이것이 푸리에 해석(Fourier analysis)의 출발점이다. 첫 번째 합은 본질적으로 디리클레 핵(Dirichlet kernel) $\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) / \sin\frac{x}{2}$이며, 이것이 푸리에 급수가 어떻게 수렴하는지를 좌우한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 $e^{i\theta}$를 곱하는 것이 왜 회전을 뜻하는지, 그리고 이런 합들이 왜 깔끔한 공식으로 닫히는지를 아름답고 기하학적인 관점에서 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.