풀이

STEP III 1990, 문제 2

순수수학 • 3차원 벡터

STEP III 1990, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q2

핵심 아이디어

네 점은 모두 하나의 곡선 $t \mapsto (t^3, t^2, t)$, 즉 **꼬인 삼차곡선**(*twisted cubic*) 위에 있다. 만나는 두 직선은 하나의 공통 평면 위에 있으므로, 소문항 (i)은 O, A, B, C가 결코 한 평면 위에 있지 않음(동일 평면(coplanar)이 아님)을 보이는 문제로 귀결되며, 이는 방데르몽드 행렬식(Vandermonde determinant)처럼 인수분해되는 행렬식(determinant)으로 확인할 수 있다. 소문항 (ii)에서는 조건 $ab = 1$ 덕분에 스칼라곱(scalar product)과 길이가 하나의 양 $a^2 + 1/a^2$의 함수로 간단해진다.

풀이

먼저, "서로 다르다"는 조건은 무엇을 알려 주는가? 매개변수(parameter)가 t인 점의 세 번째 좌표는 t 자신이므로, 서로 다른 점은 서로 다른 매개변수를 가진다. 따라서 a, b, c는 서로 다르고, O는 $t = 0$인 점이므로 a, b, c 중 어느 것도 0이 아니다.

소문항 (i)

직선 OA와 BC가 만난다고 가정하자. 공통점을 지나는 두 직선은 하나의 공통 평면 위에 있다(두 직선이 일치하는 경우에는 그 직선을 포함하는 아무 평면이나 택하면 된다). 그러면 O, A, B, C는 모두 원점을 지나는 한 평면 위에 있게 되고, 위치벡터(position vector) $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$는 일차종속(linearly dependent)이 된다. 이는 정확히 다음이 성립할 때 일어난다.

$$D = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a \\ b^3 & b^2 & b \\ c^3 & c^2 & c \end{vmatrix} = 0.$$

첫째 행에서 인수 a를, 둘째 행에서 b를, 셋째 행에서 c를 묶어 내면

$$D = abc\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

첫째 행과 둘째 행에서 각각 셋째 행을 빼고, 마지막 열을 따라 전개하면

$$D = abc\begin{vmatrix} (a-c)(a+c) & a-c & 0 \\ (b-c)(b+c) & b-c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = abc\,(a-c)(b-c)\begin{vmatrix} a+c & 1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix}$$
$$= abc\,(a-b)(a-c)(b-c).$$

$a, b, c \neq 0$이고 a, b, c가 서로 다르므로 모든 인수가 0이 아니다. 따라서 $D \neq 0$이고, 네 점은 한 평면 위에 있지 않으며, 그러므로 직선 OA와 BC는 만날 수 없다. (두 직선은 평행하지도 않으므로 꼬인 위치(skew)에 있다.)

? 생각해 보기 네 점이 한 평면 위에 있지 않음을 보이는 것으로 왜 충분한가?

만나는 두 직선은 항상 하나의 평면을 생성하기 때문이다. OA와 BC가 점 P에서 만난다면, P를 지나고 두 직선을 모두 포함하는 평면은 O, A, B, C를 모두 포함할 것이다. 우리는 그러한 평면이 존재하지 않음을 보였다.

소문항 (ii)

$b = 1/a$로 놓자. 그러면 $a \neq 0$이고, $a \neq \pm 1$이다. 그렇지 않으면 $b = a$가 되어 A와 B가 일치하기 때문이다. 스칼라곱은

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (ab)^3 + (ab)^2 + ab = 3,$$

이고, 길이의 제곱은

$$|\mathbf{a}|^2 = a^2(a^4 + a^2 + 1), \qquad |\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^6}.$$

이다. 두 식을 곱하면 $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = (a^4 + a^2 + 1)^2/a^4$이므로 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (a^4 + a^2 + 1)/a^2$이고, 이 값은 양수이다. $\theta = \angle AOB$라 하면

$$\cos\theta = \frac{3a^2}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{3}{u+1}, \qquad \text{여기서} u = a^2 + \frac{1}{a^2}.$$

나타날 수 있는 값. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)에 의해(또는 $a^2 + a^{-2} - 2 = (a - a^{-1})^2$이므로) $u \geq 2$이고, 등호는 $a^2 = 1$일 때만 성립하는데 이 경우는 제외된다. 따라서 $u > 2$이고, 그러므로

$$0 < \cos\theta = \frac{3}{u+1} < \frac{3}{3} = 1,$$

이 되어 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$를 얻는다. 다른 각은 불가능하다.

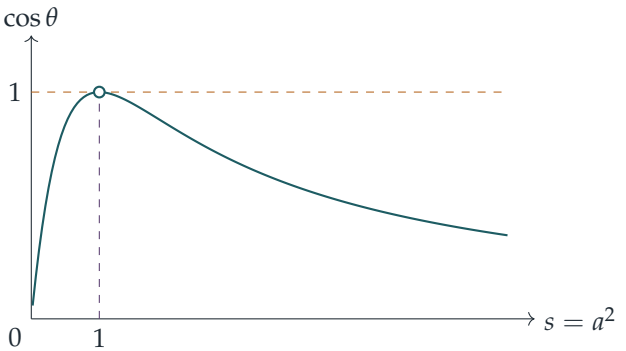
그러한 값은 모두 나타난다. $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$인 임의의 θ를 잡자. 그러면 $0 < \cos\theta < 1$이다. $u = 3/\cos\theta - 1$이 되어야 하며, 이 값은 2보다 크다. 방정식 $a^2 + 1/a^2 = u$는 a^2에 대한 이차방정식 $(a^2)^2 - u\,a^2 + 1 = 0$이고, 그 근

$$a^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4}}{2} > 1,$$

은 $u > 2$이므로 실수이다. a를 양의 제곱근으로 택하고 $b = 1/a$로 놓자. 그러면 $a > 1 > b > 0$이므로 $ab = 1$, $A \neq B$이고, 어느 점도 O가 아니며, $\cos\angle AOB = 3/(u+1) = \cos\theta$이다. 두 각이 모두 코사인이 일대일(one-to-one)인 구간 $[0, \pi]$에 있으므로 $\angle AOB = \theta$이다.

따라서 $\angle AOB$는 $0 < \angle AOB < \frac{1}{2}\pi$의 모든 값을 취하고 그 밖의 값은 취하지 않으며, 이것이 보이려던 것이다.

아래 그래프는 $s = a^2$에 대한 $\cos\theta$를 나타낸다. 그래프는 제외된 값 $s = 1$에서 1까지 올라가고 양 끝에서 0으로 다가가므로, 그 값들은 정확히 $(0, 1)$을 채운다.



검산

- $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$로 해 보자. $A = (8, 4, 2)$와 $B = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$에서 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 + 1 + 1 = 3$이고, 공식에 따르면 $\cos\theta = 12/21 = 4/7$이므로 $\theta \approx 55.2°$이며, 이는 구간 안에 있다.
- $a \to 1$이면 점 A와 B가 하나로 합쳐지고 $\theta \to 0$이다. $a \to \infty$이면 A는 거의 x축을 따라 멀어지고 B는 거의 z축을 따라 O에 다가가므로 $\theta \to \frac{1}{2}\pi$이다. 이 둘이 구간의 양 끝이다.
- D의 인수분해는 수천 개의 무작위 유리수 a, b, c에 대해 정확히 확인했고, 각에 대한 공식과 그 범위는 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- a, b, c가 서로 다르고 0이 아닌 이유를 밝히지 않는 것. 바로 이 사실들이 $D \neq 0$이 되게 한다.
- $a = \pm 1$을 제외하지 않고 $\cos\theta < 1$만으로 결론을 내리는 것. $\theta = 0$을 배제하는 것은 엄격한 부등식 $u > 2$이다.
- "다른 값은 없다"는 것만 증명하는 것. 문제는 구간의 모든 값이 실제로 나타남을 보이라고도 요구하며, 이를 위해서는 구체적인 a가 필요하다.

STEP 너머

곡선 (t^3, t^2, t)는 꼬인 삼차곡선으로, 대수기하학(algebraic geometry)의 대표적인 예이다. 소문항 (i)은 이 곡선 위의 어떤 네 점도 한 평면 위에 있지 않다는 사실이며, 여러분이 계산한 행렬식은 방데르몽드 행렬식으로, 다항식 보간(polynomial interpolation)과 일차독립(linear independence) 논증에서 다시 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 행렬식과 일차독립을 명쾌하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.