풀이

STEP III 1990, 문제 16

확률과 통계 • 기하학적 확률

STEP III 1990, 16번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q16

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.21 절 **막대 부러뜨리기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/broken-stick.html

핵심 아이디어

합이 일정한 세 길이는 각각이 전체 합의 절반보다 작을 때, 그리고 그때에만 삼각형을 이룬다. 일단 삼각형이 존재하면, 가장 긴 변의 제곱이 나머지 두 변의 제곱의 합보다 클 때, 그리고 그때에만 그 삼각형은 둔각삼각형(obtuse triangle)이다(코사인 법칙(cosine rule)). 두 소문항 모두 확률변수(random variable)에 대한 조건으로 바뀌고, 확률은 (i)에서는 구간의 길이, (ii)에서는 영역의 넓이가 된다.

풀이

소문항 (i)

세 조각의 길이는 X, $\frac{1}{2}(1-X)$, $\frac{1}{2}(1-X)$이고, 합은 1이다. 양수인 세 길이는 각각이 나머지 둘의 합보다 작을 때, 즉 둘레의 절반(여기서는 $\frac{1}{2}$)보다 작을 때, 그리고 그때에만 삼각형을 이룬다. 길이가 같은 두 조각은 $X > 0$이면 항상 $\frac{1}{2}(1-X) < \frac{1}{2}$를 만족하므로, 남는 조건은 $X < \frac{1}{2}$뿐이다. 삼각형을 만들 수 있는 사건을 T라 하자. 그러면

$$\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}\left(0 < X < \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

삼각형은 가장 긴 변의 제곱이 나머지 두 변의 제곱의 합보다 클 때, 그리고 그때에만 둔각삼각형이다. 어느 변이 가장 긴지는 X에 따라 달라진다.

- $X \le \frac{1}{3}$이면 $X \le \frac{1}{2}(1-X)$이므로, 길이가 같은 조각 중 하나가 가장 긴 변이다. 판정 조건은 $\frac{1}{4}(1-X)^2 > \frac{1}{4}(1-X)^2 + X^2$, 즉 $X^2 < 0$이 되는데, 이는 결코 성립하지 않는다. 이 삼각형은 밑변이 두 등변보다 길지 않은 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 결코 둔각삼각형이 아니다.
- $\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}$이면 가장 긴 변은 X이고, 삼각형이 둔각삼각형일 필요충분조건은

$$X^2 > 2 \cdot \tfrac{1}{4}(1-X)^2 \iff X > \frac{1-X}{\sqrt{2}},$$

  이다. 양변이 모두 양수이므로 양의 제곱근을 취했다. 이를 정리하면 $X(\sqrt{2}+1) > 1$, 즉 $X > \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \approx 0.414$이고, 이 값은 실제로 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 안에 있다.

삼각형이 둔각삼각형인 사건을 O라 하자. 그러면 $O \cap T$는 사건 $\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2}$이고, X는 균등분포(uniform distribution)를 따르므로

$$\mathrm{P}(O \mid T) = \frac{\mathrm{P}(\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2})}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\frac{1}{2} - (\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

작도는 항상 가능하다. 꼭짓점이 $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$인 삼각형 R는 $x \le 1, y \le 1, x+y \ge 1$을 만족하는 점들의 집합이다. 제시된 변 x, y, $2-x-y$의 합은 2이고, 이들은 세 값이 모두 음이 아니고 어느 것도 둘레의 절반인 1을 넘지 않을 때, 그리고 그때에만 (퇴화(degenerate)되었을 수도 있는) 삼각형을 이룬다.

- $0 \le x \le 1$과 $0 \le y \le 1$은 R 위에서 성립한다.
- $2-x-y \le 1$은 곧 $x+y \ge 1$이고, $2-x-y \ge 0$은 $x \le 1, y \le 1$에서 나온다.

따라서 R의 모든 점은 삼각형을 준다. 삼각형이 퇴화되는 것은 R의 변 위에서뿐이며, 그 확률은 0이다.

$\angle ABC$는 언제 둔각인가? B에서의 각은 BA와 BC 사이에 있으므로, 그 대변은 $CA = y$이다. 코사인 법칙에 의해 $\angle ABC$가 둔각일 필요충분조건은 $CA^2 > AB^2 + BC^2$, 즉

$$y^2 > x^2 + (2-x-y)^2.$$

이다. $(2-x-y)^2 = (2-x)^2 - 2(2-x)y + y^2$으로 전개하면 y^2 항이 소거되고, 조건은

$$2(2-x)y > x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4.$$

이 된다. $x \le 1$이므로 $2-x>0$이고, 따라서 부등호 방향을 바꾸지 않고 $2(2-x)$로 나눌 수 있다.

$$y > \frac{x^2-2x+2}{2-x},$$

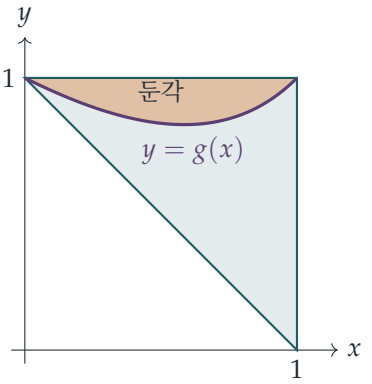
이로써 요구된 결과를 얻는다. 우변을 $g(x)$라 하자.

생각해 보기 곡선 $y=g(x)$는 정말로 삼각형 R 안에 머무는가?

둔각 영역이 단순히 R에서 곡선 위쪽 부분이 되려면, $0 \le x \le 1$에서 곡선이 직선 $y=1-x$와 $y=1$ 사이에 있어야 한다. 실제로

$$1-g(x) = \frac{(2-x)-(x^2-2x+2)}{2-x} = \frac{x(1-x)}{2-x} \ge 0, \qquad g(x)-(1-x) = \frac{x}{2-x} \ge 0,$$

이고 $g(0)=g(1)=1$이다. 따라서 곡선은 $(0,1)$에서 $(1,1)$까지 이어지며, $y=1$ 아래로 내려가지만 빗변(hypotenuse) $x+y=1$ 아래로는 결코 내려가지 않는다.



확률. 삼각형 R의 넓이는 $\frac{1}{2}$이므로 결합 밀도(joint density)는 R 위에서 2이고,

$$\mathrm{P}(\angle ABC\text{가 둔각}) = 2 \times \text{넓이}\{(x,y) : g(x) < y \le 1,\ 0 \le x \le 1\} = 2\int_0^1 \big(1-g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

이다. g를 적분하기 위해 $u=2-x$로 치환(substitution)하면 $x=2-u$이고

$$x^2-2x+2 = (2-u)^2-2(2-u)+2 = u^2-2u+2, \qquad g = \frac{u^2-2u+2}{u} = u-2+\frac{2}{u}.$$

이다. x가 0에서 1까지 변할 때 u는 2에서 1까지 변하고, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(u-2+\frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^2-2u+2\ln u\right]_1^2 \\ &= (2-4+2\ln 2)-\left(\tfrac{1}{2}-2\right) = 2\ln 2-\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\angle ABC\text{가 둔각}) = 2\left(1-2\ln 2+\tfrac{1}{2}\right) = 3-4\ln 2,$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

검산

- 수치로는 $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716$, $3 - 4\ln 2 \approx 0.2274$이다. 시행 10^6회의 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)에서는 약 0.1719와 0.2278을 얻었다.
- 두 답 모두 0과 1 사이에 있다. (ii)에서 곡선은 양 끝에서 $y = 1$에 닿는다. $x = 0$에서는 변 BC가 사라지고, $x = 1$에서는 변 AB가 사라지므로, 예상대로 둘 다 퇴화된 경우이다.
- 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$를 계산하면 0.886294가 나와 $2\ln 2 - \frac{1}{2}$와 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 조건부(conditional)로 계산하는 것을 잊는 실수: 둔각삼각형이 될 무조건부 확률은 $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$로, 요구된 답의 절반이다.
- (ii)에서 코사인 법칙에 엉뚱한 변을 쓰는 실수. B에서의 각의 대변은 AB가 아니라 $CA = y$이다.
- R 위의 밀도가 1이 아니라 2임을 잊는 실수. 그러면 답이 절반 크기가 된다.

STEP 너머

확률을 길이나 넓이로 바꾸는 것을 **기하적 확률**(*geometric probability*)이라 하며, 막대를 무작위로 부러뜨리는 문제는 그 고전적인 문제 가운데 하나이다. 서로 독립인 균등분포의 두 점에서 막대를 부러뜨리면 삼각형이 될 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 소문항 (ii)는 연속 결합분포(continuous joint distribution)를 처음 맛보는 문제로, 여기서 확률은 어떤 영역 위에서 결합 밀도를 이중적분(double integral)한 값이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 결합 밀도를 다루며 이런 종류의 문제를 여러 개 싣고 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.