풀이

STEP III 1990, 문제 14

역학 • 힘의 계

STEP III 1990, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

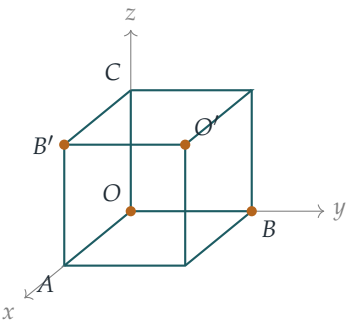
step.maths.org/questions/90-s3-q14

핵심 아이디어

강체(rigid body)에 작용하는 힘의 계는 결국 두 벡터로 요약된다. 하나는 합력(resultant) $\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$이고, 다른 하나는 선택한 점에 대한 모멘트(moment) $\mathbf{G}_P = \sum (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}) \times \mathbf{F}_i$이다. 기준점을 O에서 P로 옮기면 모멘트는 간단한 규칙 $\mathbf{G}_P = \mathbf{G}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{R}$에 따라 바뀐다. 이 문제의 모든 부분은 이 규칙을 서로 다른 P에 적용한 것이다.

풀이

정육면체를 모서리의 길이가 a인 강체로 모형화하면 $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$, $C = (0, 0, a)$이고, B의 맞은편 꼭짓점은 $B' = (a, 0, a)$이다.



λ, μ, ν 구하기

O에 작용하는 힘은 O에 대한 모멘트가 없으므로 나머지 세 힘만 고려하면 된다. $(x,y,z)\times(p,q,r) = (yr-zq,\ zp-xr,\ xq-yp)$를 이용하면 다음과 같다.

$$\overrightarrow{OO'}\times\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\\lambda-1\\-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB'}\times\begin{pmatrix}1\\\mu\\\nu\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\\mu\\\nu\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-\mu\\1-\nu\\\mu\end{pmatrix}.$$

이를 더하면 O에 대한 전체 모멘트는 $a\,(3-\mu,\ \lambda-\nu,\ 1-\lambda+\mu)$이다. 각 성분을 영으로 놓으면 $\mu = 3$, 이어서 $\lambda = 1+\mu = 4$, 그리고 $\nu = \lambda = 4$를 얻는다.

$$\lambda = 4, \qquad \mu = 3, \qquad \nu = 4.$$

이 중 어느 것도 α, β, γ에 의존하지 않으며, 합력은 다음과 같다.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}\alpha+\lambda-1+1\\\beta+\mu\\\gamma+1+2+\nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha+4\\\beta+3\\\gamma+7\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G}_O = \mathbf{0}.$$

소문항 (i)

$\alpha = \beta = \gamma = 0$이면 $\mathbf{R} = (4,3,7)$이다. 두 힘의 계는 합력이 같고 한 점에 대한 모멘트가 같을 때(따라서 모든 점에 대한 모멘트가 같을 때) 동등(equivalent)하다. 그러므로 B에 작용하는 하나의 힘은 $\mathbf{R}$ 자체여야 하고, 짝힘(couple)은 원래 계의 B에 대한 모멘트와 같아야 한다.

$$\mathbf{G}_B = \mathbf{G}_O - \overrightarrow{OB}\times\mathbf{R} = \mathbf{0} - a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix}7\\0\\-4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-7\\0\\4\end{pmatrix}.$$

? **생각해 보기** B에 대한 모멘트가 왜 $\mathbf{G}_O - \overrightarrow{OB}\times\mathbf{R}$와 같을까?

각 힘에 대하여 $(\mathbf{r}_i - \mathbf{b})\times\mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i - \mathbf{b}\times\mathbf{F}_i$이고, 이를 i에 대해 모두 더하면 $\mathbf{G}_O - \mathbf{b}\times\mathbf{R}$가 된다.

따라서 동등한 계는 B에 작용하는 힘 $(4,3,7)$과 모멘트가 $a(-7,0,4)$인 짝힘으로 이루어진다. 검산해 보면, B에 작용하는 힘과 이 짝힘을 합한 것의 O에 대한 모멘트는 $a(7,0,-4)+a(-7,0,4)=\mathbf{0}$으로, 마땅히 그래야 하는 결과와 일치한다.

소문항 (ii)

이제 $\mathbf{R}=(2+4,\ 3+3,\ 2+7)=(6,6,9)=3(2,2,3)$이고, 여전히 $\mathbf{G}_O=\mathbf{0}$이다. 위치벡터(position vector)가 $\mathbf{r}=(x,y,z)$인 점 P에서

$$\mathbf{G}_P=\mathbf{G}_O-\mathbf{r}\times\mathbf{R}=-\mathbf{r}\times\mathbf{R}.$$

$\mathbf{R}\neq\mathbf{0}$이므로, 이것은 $\mathbf{r}$가 $\mathbf{R}$에 평행할 때(또는 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$일 때) 그리고 그때에만 영벡터가 된다. 따라서 구하는 자취(locus)는 O를 지나고 방향이 $(2,2,3)$인 직선이다.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

물리적으로 보면, 전체 계는 이 직선을 따라 작용하는 하나의 힘 $(6,6,9)$와 동등하다.

정육면체가 회전 없이 평행이동(translation)하면 모든 점이 같은 변위(displacement)만큼 움직이므로, 힘이 한 일(work)은 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{s}$이다. 여기서 $\mathbf{s}$는 변위이다. 직선을 따라 $(2,2,3)$ 방향으로 거리 d만큼 움직이면 $\mathbf{s}=\dfrac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)$이고

$$W=(6,6,9)\cdot\frac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)=\frac{51d}{\sqrt{17}}=3\sqrt{17}\,d.$$

문제에서는 거리를 따로 정하지 않았으므로, 단위 거리당 한 일은 $3\sqrt{17}\approx 12.37$ 단위이다. $\mathbf{R}$가 이 직선 위에 놓여 있으므로 이 값은 그냥 $|\mathbf{R}|\,d=\sqrt{36+36+81}\,d=\sqrt{153}\,d$이며, 같은 수이다. (직선을 따라 반대 방향으로 움직이면 $-3\sqrt{17}\,d$가 된다.)

검산

- $\lambda=4,\mu=3,\nu=4$일 때 O에 대한 세 모멘트는 $a(1,3,-4)$, $a(2,0,1)$, $a(-3,-3,3)$이고, 이들의 합은 영벡터이다.
- (ii)에서 $P=(2,2,3)$을 택하면 $\mathbf{r}\times\mathbf{R}=(2,2,3)\times(6,6,9)=\mathbf{0}$이다. $P=(1,0,0)$에서의 모멘트는 $-(0,-9,6)\neq\mathbf{0}$이다.
- 정확한 분수 계산을 하는 컴퓨터로 모든 모멘트를 확인하였고, (i)의 동등한 계가 임의로 고른 20개의 점에 대해 원래 계와 같은 모멘트를 가짐을 확인하였으며, 단위 거리당 한 일이 $3\sqrt{17}\approx 12.369$임을 확인하였다.

흔한 실수

- $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$에서 순서를 잘못 쓰는 것: 순서를 뒤집으면 모든 부호가 바뀐다.
- (i)의 짝힘을 $+\overrightarrow{OB} \times \mathbf{R}$로 잡는 것. 힘을 O에서 B로 옮기려면 반대 부호의 보정 짝힘이 필요하다.
- 서로 다른 꼭짓점에 작용하는 힘들에 대해 각각 일을 구해 더하는 것. 순수한 평행이동에서는 합력만이 중요하다.

STEP 너머

강체에 작용하는 임의의 힘의 계는 어떤 직선을 따라 작용하는 하나의 힘과 그 같은 직선에 대한 짝힘으로 환원된다. 이것을 **렌치**(wrench)라 하며, 그 피치(pitch)는 $\mathbf{R} \cdot \mathbf{G} / |\mathbf{R}|^2$이다. (ii)에서는 피치가 영이므로 렌치는 그냥 하나의 힘이고, 모멘트가 영인 자취는 그 힘의 작용선(line of action), 곧 중심축(central axis)이다. 이러한 개념은 강체 동역학과 로봇공학의 나사 이론(screw theory)으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 토크와 강체를 알맞은 수준으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.