풀이

STEP III 1990, 문제 13

역학 • 구 내부에서의 운동

STEP III 1990, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q13

핵심 아이디어

운동은 두 단계로 이루어진다. 먼저 수직항력(normal reaction)이 0이 될 때까지 구면 위에서 원운동(circular motion)을 하고, 그다음에는 포물체(projectile)로서 자유롭게 날아간다. 이탈 조건은 이탈하는 순간의 속력을 θ로 나타내 준다. 나머지는 힌트가 해결한다. 포물체가 다시 구면 위에 있을 조건 $x^2 + y^2 = a^2$를 t에 대한 방정식으로 쓰면 된다. 이탈 조건 때문에 여러 항이 소거되어 식이 아름답게 정리된다.

풀이

모형

P를 입자(particle)로, 반지름이 a인 구를 매끄러운(smooth) 면으로 본다. 그러면 P가 구에 닿아 있는 동안 P에 작용하는 힘은 무게 mg와 O를 향하는 수직항력 R뿐이다. 운동은 O를 지나는 연직 평면 안에서 일어난다. 원점을 O로, x축을 수평 방향으로, y축을 연직 위쪽으로 잡고, P가 구의 오른쪽 면을 타고 올라간다고 하자.

P가 구면에서 떨어지려면 반드시 O보다 높은 곳에서 떨어져야 한다. O보다 낮은 곳에서는 중력의 PO 방향 성분이 O에서 멀어지는 쪽을 향하므로, P가 원 위를 움직이는 동안 그곳에서 R이 0이 될 수 없다. 따라서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

구면에서 떨어지기

OP가 연직 위 방향과 각 θ를 이룰 때 P의 속력을 v라 하자. 이때 P는 O보다 $a\cos\theta$만큼 높은 곳에 있다. O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면 무게의 그 방향 성분은 $mg\cos\theta$이므로

$$R + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}.$$

P는 $R = 0$일 때 떨어지므로, 그 순간

$$v^2 = ag\cos\theta.$$

(에너지 보존(conservation of energy)에 의해 던진 속력 u는 $u^2 = v^2 + 2ga(1+\cos\theta) = ag(2+3\cos\theta)$를 만족해야 하므로, u를 알맞게 고르면 $(0, \frac{\pi}{2})$의 모든 θ를 얻을 수 있다. P가 올라감에 따라 v가 줄고 R도 줄어들므로, R은 정확히 이 지점에서 처음으로 0이 된다.)

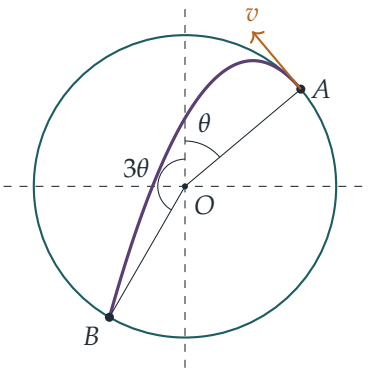
자유 비행

떨어지는 순간을 $t = 0$이라 하자. 이때 P는 $(a\sin\theta, a\cos\theta)$에 있고, 속도는 접선(tangent) 방향으로 OP에 수직이며 위로 꼭대기를 넘어가는 쪽을 향한다.

$$\text{속도} = v(-\cos\theta,\ \sin\theta).$$

그 뒤로는 중력만 작용하므로

$$x = a\sin\theta - vt\cos\theta, \qquad y = a\cos\theta + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



P는 A에서 떨어지고, 아래에서 보이듯이 B에서 다시 구면에 부딪힌다.

P는 $x^2 + y^2 = a^2$일 때 구면 위에 있다. 전개하면 상수항과 t에 대한 일차항은

$$a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = a^2 \qquad \text{그리고} \qquad -2avt\sin\theta\cos\theta + 2avt\cos\theta\sin\theta = 0$$

이므로

$$\begin{aligned} x^2+y^2-a^2 &= v^2t^2\cos^2\theta + v^2t^2\sin^2\theta - gt^2\left(a\cos\theta + vt\sin\theta\right) + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= \left(v^2 - ag\cos\theta\right)t^2 - gv\sin\theta\, t^3 + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - v\sin\theta\right), \end{aligned}$$

이다. 마지막 단계에서 $v^2 = ag\cos\theta$를 이용하였다.

? **생각해 보기** 왜 $t=0$이 단순한 근이 아니라 삼중근(triple root)으로 나오는가?

떨어지는 순간에는 중력만으로 원 위를 움직이는 데 필요한 O 방향 가속도 v^2/a가 정확히 공급된다. 그래서 포물선은 구면과 같은 방향**뿐 아니라** 같은 곡률(curvature)로 출발한다. 즉 포물선은 구면에 아주 바짝 붙어 있다가 구 안쪽으로 떨어져 나간다. 이 때문에 t항뿐 아니라 t^2항도 소거된다.

$0 < t < 4v\sin\theta/g$에서 이 식은 음수이므로 P는 구의 엄밀히 안쪽에 있고, 다음으로 구면과 만나는 시각은

$$T = \frac{4v\sin\theta}{g}.$$

떨어지는 지점

$t = T$에서 $vT\sin\theta = 4v^2\sin^2\theta/g = 4a\cos\theta\sin^2\theta$와 $\frac{1}{2}gT^2 = 8v^2\sin^2\theta/g = 8a\cos\theta\sin^2\theta$를 이용하면

$$y = a\cos\theta + 4a\cos\theta\sin^2\theta - 8a\cos\theta\sin^2\theta = a\cos\theta\left(1-4\sin^2\theta\right).$$

($\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(1-4\sin^2\theta)$이므로 이는 $a\cos 3\theta$이다. 마찬가지로 $x = -a\sin 3\theta$이므로, 충돌 지점 B는 그림에서처럼 반대쪽에서 연직 위 방향과 각 3θ를 이루는 곳에 있다.)

P가 O보다 낮은 곳에 부딪힐 필요충분조건은 $y<0$이다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta>0$이고, 따라서

$$y<0 \iff 1-4\sin^2\theta<0 \iff \sin\theta > \tfrac{1}{2} \iff \theta > \tfrac{\pi}{6},$$

이다. 마지막 단계는 sin이 $(0,\frac{\pi}{2})$에서 증가하기 때문이다. $\theta=\frac{\pi}{6}$이면 P는 정확히 O와 같은 높이에서 구면에 부딪힌다. 따라서 θ가 넘어야 하는 각은

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ}$$

이고, $30^\circ < \theta < 90^\circ$인 모든 θ에 대하여 실제로 O보다 낮은 곳에서 충돌이 일어난다.

검산

- $\theta = 60°$: 공식에서 $y = a\cos 180° = -a$이므로, P는 가장 낮은 점, 즉 던진 지점으로 되돌아와 떨어진다. $\theta = 45°$이면 연직 위 방향에서 $135°$인 곳에 떨어진다. 두 경우 모두 예상대로 $y < 0$이다.
- $\theta \to 0$이면 $T \to 0$이고 $B \to A$이다. 꼭대기에서 겨우 떨어지는 입자는 곧바로 구면 위로 다시 떨어진다.
- 수치 시뮬레이션($R = 0$이 될 때까지 구면 위의 운동을 단계별로 계산하고, 그다음 구면과 만날 때까지 포물체 운동을 계산)을 $\theta = 10°, 25°, 29°, 30.5°, 31°, 45°, 60°, 80°$에 대해 수행한 결과, 소수점 넷째 자리까지 $T = 4v\sin\theta/g$ 및 $y = a\cos 3\theta$와 일치하였다. 예를 들어 $\theta = 31°$이면 $y/a = -0.0523$이다.

흔한 실수

- 속도의 방향을 잘못 잡는 것. 속도는 OP에 수직이고 여전히 위로 꼭대기를 넘어가는 쪽을 향하며, 성분은 $(v\sin\theta,\ v\cos\theta)$가 아니라 $(-v\cos\theta,\ v\sin\theta)$이다.
- $x^2 + y^2 = a^2$를 풀기 전에 $v^2 = ag\cos\theta$를 쓰는 것을 잊는 것. 그러면 깔끔한 인수분해(factorisation) 대신 다루기 힘든 사차식(quartic)이 남는다.
- P가 O보다 높은 곳에서 떨어지므로 $\cos\theta > 0$이라는 점을 언급하지 않고 $1 - 4\sin^2\theta < 0$을 얻기 위해 양변을 나누는 것.

STEP 너머

$t = 0$에서의 삼중근은 **접촉**(*osculation*)에 관한 사실이다. 포물선과 원은 이탈 지점에서 접선과 곡률을 공유하므로 2차 접촉을 한다. 곡률과 접촉원(osculating circle)은 곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 핵심적인 개념이며, 역학에서 가속도를 접선 성분과 법선 성분으로 나눌 때마다 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 극좌표(polar coordinates)에서의 운동과 이러한 종류의 구속 운동(constrained motion)을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.