풀이

STEP III 1990, 문제 12

역학 • 움직이는 쐐기 위의 입자

> **STEP III 1990, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q12

핵심 아이디어

입자가 미끄러지는 동안 두 가지가 보존된다. 수평 방향 운동량(momentum)이 보존되고(탁자가 매끄러우므로 수평 방향의 외력이 없다), 에너지(energy)가 보존된다(모든 면이 매끄럽다). 이 두 법칙과 함께, 입자가 항상 **쐐기에 대하여 상대적으로** 면 AC를 따라 움직인다는 사실을 쓰면 모든 속도가 정해진다. 그 뒤의 튀어 오름과 비행은 쐐기가 일정한 속력으로 미끄러져 가는 동안 일어나는 단순한 포물체 운동(projectile motion)일 뿐이다.

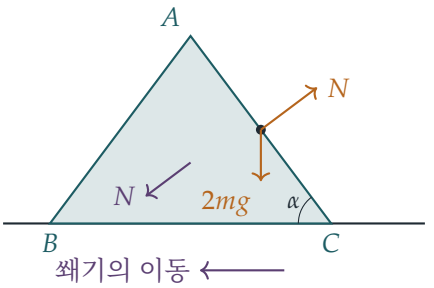
풀이

설정하기

입자를 질량 $2m$인 질점(point mass)으로, 쐐기를 질량 m인 강체(rigid body)로 모형화한다. 모든 접촉면은 매끄럽다. A, B, C를 지나는 연직 단면에서 생각한다. B를 원점에 두고 $C = (6a, 0)$, $A = (3a, 4a)$로 놓는다. 삼각형이 $AB = AC = 5a$이고 밑변의 절반이 $3a$인 이등변삼각형이므로 A의 높이는 $4a$이다. 각 ACB를 α라 하자. 그러면

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

입자는 AC를 따라 미끄러져 내려가며 양의 x 방향으로 움직이고, 쐐기는 음의 x 방향으로 반동한다.



AC를 따라 내려가는 방향으로, **쐐기에 대한** 입자의 상대 속력을 u라 하자. 쐐기의 속도를 V라 하면 이는 수평 방향이다. 입자의 속도는 쐐기의 속도에 쐐기에 대한 상대 속도를 더한 것이다.

$$\mathbf{v}_P = \left(V + u\cos\alpha,\ -u\sin\alpha\right) = \left(V + \tfrac{3}{5}u,\ -\tfrac{4}{5}u\right).$$

미끄러지는 동안의 운동량과 에너지

외력은 중력과 탁자의 연직 반작용뿐이므로 수평 방향 운동량이 보존된다. 처음 운동량이 0이므로

$$2m\left(V + \tfrac{3}{5}u\right) + mV = 0 \quad\Longrightarrow\quad V = -\tfrac{2}{5}u.$$

따라서 입자의 속도는 $\left(\tfrac{1}{5}u,\ -\tfrac{4}{5}u\right)$이고 쐐기의 속도는 $-\tfrac{2}{5}u$이다.

> ? **생각해 보기** 왜 입자 하나만 따로 떼어서 에너지 보존을 적용하면 안 될까?

입자에 작용하는 수직항력(normal reaction)은 면 AC에 수직이지만, 그 면 자체가 움직이고 있다. 그러므로 입자의 실제 속도는 AC 방향이 아니며, N은 입자에 일을 한다. 에너지가 보존되는 것은 **계** 전체뿐인데, 한 쌍의 수직항력이 하는 일의 합이 0이기 때문이다.

입자는 AC의 아래 끝에 도달할 때까지 높이 $4a$만큼 떨어진다. 계 전체의 에너지 보존으로부터

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(2m)\left(\tfrac{1}{25} + \tfrac{16}{25}\right)u^2 + \tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{4}{25}u^2 &= 2mg\cdot 4a\\ \tfrac{19}{25}u^2 &= 8ga\\ u^2 &= \frac{200ga}{19}.\end{aligned}$$

입자는 내내 면 위에 머문다. 가속도를 이용해 분해해 보면 수직항력이 상수 $N = \tfrac{10}{19}mg > 0$임을 알 수 있다.

충돌 순간 각 물체의 위치

운동량이 내내 0이므로 계의 질량중심(centre of mass)은 수평 방향으로 움직이지 않는다. 입자가 탁자에 닿을 때까지 입자가 수평으로 x_P, 쐐기가 수평으로 x_W만큼 움직였다고 하자. 그러면 $2m\,x_P + m\,x_W = 0$이다. 쐐기에 대하여 입자는 A에서 C까지, 즉 수평 거리 $3a$만큼 움직였으므로 $x_P - x_W = 3a$이다. 따라서

$$x_P = a, \qquad x_W = -2a.$$

그 순간 입자는 $x = 3a + a = 4a$에 있고 모서리 C는 $6a - 2a = 4a$에 있다. 입자가 막 C에 도달했으므로 둘이 같은 위치에 있는 것은 당연하다.

튀어 오름과 비행

탁자는 고정되어 있고 매끄러우며, 충돌은 완전 탄성 충돌(perfectly elastic)이다. 따라서 입자의 수평 속도는 변하지 않고 연직 속도는 반대가 된다. 입자는 속도 $\left(\frac{1}{5}u,\ \frac{4}{5}u\right)$로 탁자를 떠난다. 다시 탁자에 닿을 때까지의 비행 시간은

$$T = \frac{2 \cdot \frac{4}{5}u}{g} = \frac{8u}{5g}.$$

비행하는 동안 입자는 오른쪽으로 수평 거리 $\frac{1}{5}u \cdot T = \dfrac{8u^2}{25g}$만큼 움직인다.

입자가 떠난 뒤에는 쐐기에 수평 방향의 힘이 작용하지 않으므로, 쐐기는 왼쪽으로 속력 $\frac{2}{5}u$를 유지하며 계속 움직인다. 시간 T 동안 쐐기는 $\frac{2}{5}u \cdot T = \dfrac{16u^2}{25g}$만큼 움직인다. 입자는 오른쪽으로, 쐐기는 왼쪽으로 움직이므로 입자가 다시 쐐기와 만날 수는 없다.

둘 다 $x = 4a$에서 출발하여 서로 반대 방향으로 움직였으므로, D와 E 사이의 거리는 이 두 거리의 합이다.

$$DE = \frac{8u^2}{25g} + \frac{16u^2}{25g} = \frac{24u^2}{25g} = \frac{24}{25} \cdot \frac{200a}{19} = \frac{192}{19}\,a,$$

이로써 요구된 결과를 얻는다.

검산

- 충돌 순간의 전체 운동 에너지: $\frac{19}{25}mu^2 = \frac{19}{25} \cdot \frac{200}{19}mga = 8mga$. 이는 잃은 위치 에너지와 같다.
- 운동량: $2m \cdot \frac{1}{5}u + m \cdot \left(-\frac{2}{5}u\right) = 0$.
- $a = g = m = 1$로 놓고 운동을 수치적으로 단계별 계산하면 $DE \approx 10.1053$이고, $\frac{192}{19} = 10.10526\ldots$이다.

흔한 실수

- 입자의 속도를 AC 방향으로 잡는 것. 그것은 움직이는 쐐기에 **대한 상대** 속도일 뿐이다.
- 입자 하나에 대해 $\frac{1}{2}(2m)u^2 = 2mg \cdot 4a$라고 쓰는 것. 이는 쐐기의 운동 에너지와 N이 한 일을 무시한 것이다.
- DE를 충돌 지점 $x = 4a$가 아니라 C의 원래 위치에서부터 재는 것. 그 순간 입자와 C는 모두 $x = 4a$에 있다.

STEP 너머

매끄러운 탁자 위에서 미끄러지는 쐐기는 **구속 조건**(constraints)이 있는 계의 고전적인 예이다. 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)은 이런 계를 다룰 때 구속력이 전혀 나타나지 않도록 좌표(여기서는 쐐기의 위치와 비탈을 따라 내려간 입자의 거리)를 고른다. 그러면 보존되는 수평 방향 운동량은 수평 평행이동에 대한 문제의 대칭성에서 나오는데, 이는 뇌터 정리(Noether's theorem)의 한 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 움직이는 좌표계와 다물체계에서의 운동량 보존을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.