풀이

STEP III 1990, 문제 11

역학 • 강체의 회전

STEP III 1990, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

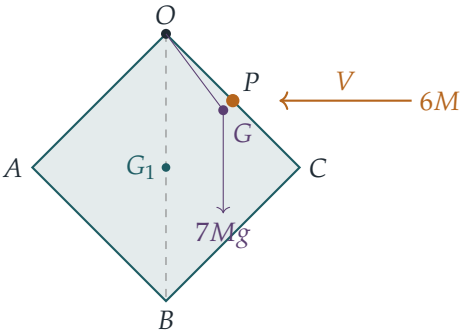
step.maths.org/questions/90-s3-q11

핵심 아이디어

충돌은 순간적으로 일어나고, 그동안 O의 회전축은 큰 충격력(impulsive force)을 가하므로 선운동량(linear momentum)은 보존되지 **않는다**. 그러나 그 충격은 O에 작용하므로 O에 대한 모멘트(moment)가 없다. 따라서 회전축에 대한 각운동량(angular momentum)은 충돌 전후로 보존된다. 충돌 이후의 계는 고정된 축에 매달린 강체(rigid body)이고, 일을 하는 힘은 중력뿐이므로 에너지 보존(conservation of energy)을 이용하면 꼭대기를 넘어갈 수 있는지 판단할 수 있다.

풀이

박판(lamina)은 균일한 정사각형 강체로, 입자는 충돌하는 순간 박판에 달라붙는 점질량으로, 회전축은 매끄러운 것으로 모형화한다. O를 원점으로 잡는다. OB가 연직 아래 방향일 때, 정사각형의 중심 G_1은 깊이 $\sqrt{2}\,a$(대각선 $2\sqrt{2}\,a$의 절반)에 있고, A와 C는 OB의 양쪽으로 수평 거리 $\sqrt{2}\,a$만큼 떨어져 있으며 역시 깊이 $\sqrt{2}\,a$에 있다. 따라서 OC의 중점 P는 O로부터 수평 거리 $a/\sqrt{2}$, 깊이 $a/\sqrt{2}$인 곳에 있고, $OP = a$이다.



(그림은 입자가 오른쪽에서 날아오는 경우를 나타낸다. 뒤에서 보겠지만 왼쪽에서 날아와도 답은 같다.)

회전축에 대한 관성 모멘트

한 변의 길이가 $2a$인 균일한 정사각형 박판의 중심을 지나고 판에 수직인 축에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는 $\frac{1}{12}M((2a)^2+(2a)^2) = \frac{2}{3}Ma^2$이다(수직축 정리(perpendicular axis theorem)에 의해, 판 위의 두 축에 대한 관성 모멘트 $\frac{1}{3}Ma^2$를 각각 더한 것이다). 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해, $OG_1 = \sqrt{2}\,a$이므로

$$I_{\text{박판}} = \tfrac{2}{3}Ma^2 + M(\sqrt{2}\,a)^2 = \tfrac{8}{3}Ma^2.$$

입자는 결국 O로부터 거리 a인 P에 놓이므로, 합쳐진 물체에 대해

$$I = \tfrac{8}{3}Ma^2 + 6Ma^2 = \tfrac{26}{3}Ma^2.$$

충돌

생각해 보기 왜 충돌에서 선운동량 보존을 쓸 수 없을까?

회전축이 고정되어 있기 때문이다. O가 움직이지 않도록 하려면 축은 충돌하는 동안 박판에 충격량(impulse)을 주어야 하며, 그 충격량은 알 수 없다. 하지만 그 작용선은 O를 지나므로 O에 대한 모멘트는 0이고, 중력은 한순간에 충격량을 주지 않는다. 따라서 회전축에 대한 각운동량은 보존된다.

충돌 직전에 O에 대한 입자의 각운동량은 운동량 $6MV$에 O로부터 입자의 (수평) 운동 경로까지의 수직 거리를 곱한 것이며, 이 거리는 P의 깊이, 곧 $a/\sqrt{2}$이다. 박판은 정지해 있다. 충돌 직후에는 물체 전체가 각속력 ω로 회전하므로

$$\tfrac{26}{3}Ma^2\,\omega = 6MV\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} \qquad\Longrightarrow\qquad \omega = \frac{9V}{13\sqrt{2}\,a}.$$

그러면 충돌 직후의 운동 에너지는

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{26}{3}Ma^2\cdot\frac{81V^2}{338a^2} = \frac{27}{26}MV^2.$$

완전한 회전

합쳐진 물체의 질량중심(centre of mass) G(질량 $7M$)의 O로부터의 수평 변위와 깊이는

$$\frac{M\cdot 0 + 6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M} = \frac{3\sqrt{2}}{7}a, \qquad \frac{M\cdot\sqrt{2}\,a + 6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M} = \frac{4\sqrt{2}}{7}a,$$

이므로 $OG = \frac{\sqrt{2}}{7}a\sqrt{3^2+4^2} = \frac{5\sqrt{2}}{7}a$이다.

물체는 강체이고 O에 핀으로 고정되어 있으므로 (줄에 매달린 입자와 달리) 원 궤도에서 "떨어져 나갈" 수 없다. 따라서 위치 에너지가 가장 큰 위치, 곧 G가 O의 연직 위에 있는 위치에서도 운동 에너지가 양수일 때, 그리고 그때에만 완전히 회전한다. G는 처음 O 아래 깊이 $\frac{4\sqrt{2}}{7}a$에서 O 위 높이 $\frac{5\sqrt{2}}{7}a$까지 올라가므로

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}a + \frac{5\sqrt{2}}{7}a = \frac{9\sqrt{2}}{7}a,$$

만큼 상승하며, 이는 물체가 어느 방향으로 돌든 같다. 따라서 입자가 어느 쪽에서 왔는지는 상관없다. 충돌 이후에는 중력만 일을 하므로(매끄러운 축은 일을 하지 않는다), 에너지 보존에 의해

$$\frac{27}{26}MV^2 > 7Mg\cdot\frac{9\sqrt{2}}{7}a = 9\sqrt{2}\,Mga,$$

이어야 한다. 즉,

$$\boxed{V^2 > \frac{26\sqrt{2}}{3}ga.}$$

문제의 모든 질량이 M의 배수이므로, 당연히 M은 약분된다. (정확히 등호가 성립하면 물체는 꼭대기 위치를 향해 한없이 느리게 다가갈 뿐 결코 지나가지 못하므로, 부등식은 등호 없이 성립해야 한다.)

검산

- 관성 모멘트, 질량중심(연직 아래 방향과 이루는 각의 tan 값은 $\frac{3}{4}$), 운동 에너지 계수 $\frac{27}{26}$을 모두 수치적으로 확인했다. 관성 모멘트는 기울어진 정사각형 위의 격자에서 적분하여 확인했다.
- $a = 1.3$, $g = 9.81$로 두고 운동 방정식 $I\ddot{\theta} = -7Mg\,x_G$를 수치적으로 단계별 계산했다. V^2이 $\frac{26\sqrt{2}}{3}ga \approx 15.6$의 98%일 때는 물체가 되돌아오고, 102%일 때는 한 바퀴를 완전히 돈다. 입자가 어느 방향에서 오든 마찬가지이다.

- 에너지에 대한 타당성 확인: 입자의 운동 에너지 $3MV^2$ 가운데 $\frac{27}{26}MV^2$만이 충돌 후에 남는데, 이는 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)에서 예상되는 결과이다.

흔한 실수

- 충돌 전후로 선운동량을 보존시키는 것: 축이 충격량을 주므로 선운동량은 보존되지 않는다.
- 입자 운동량의 팔 길이로 운동 경로까지의 수직 거리 $a/\sqrt{2}$ 대신 거리 $OP = a$를 쓰는 것.
- 입자가 달라붙고 나면 질량중심이 OB에서 벗어난다는 것을 잊는 것. 그래서 꼭대기까지의 상승 높이는 단순히 처음 깊이의 두 배가 아니다.

STEP 너머

이것은 고정된 축을 중심으로 회전하는 강체의 역학이다. 여기서는 축에서의 충격 반작용 때문에 충돌에서 보존되는 양이 선운동량이 아니라 각운동량이 된다. 자연스럽게 이어지는 주제로 **타격 중심**(centre of percussion)이 있다. 이는 타격을 가해도 축에 충격 반작용이 전혀 생기지 않는 점으로, 크리켓 배트에 "스위트 스폿"이 있는 이유이기도 하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 회전과 각충격량을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.