풀이

STEP III 1990, 문제 10

순수수학 • 근과 점근 근사

STEP III 1990, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s3-q10

핵심 아이디어

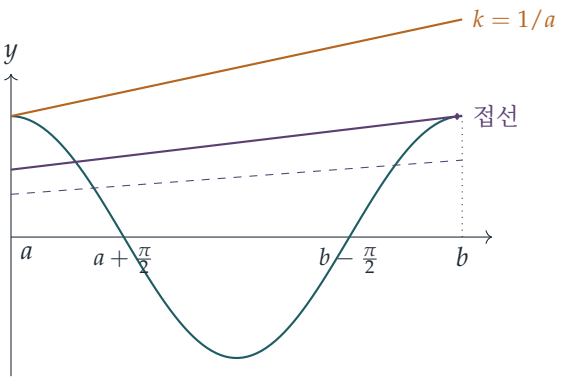
주어진 구간에서 $\sin x$는 꼭대기에서 시작하여 꼭대기에서 끝나면서 한 주기(period)를 온전히 지나고, 직선 $y = kx$는 양수이며 천천히 올라간다. 근(root)은 $\sin x > 0$인 곳에서만 생길 수 있는데, 그런 곳은 서로 떨어진 두 구간이다. 하나는 $\sin x$가 감소하는 구간(교점이 많아야 하나)이고, 다른 하나는 $\sin x$가 증가하면서 위로 볼록(concave)한 구간(교점이 많아야 둘)이다. 흥미로운 경계는 직선이 두 번째 봉우리에 딱 접하는 경우이다. 접점을 구간의 오른쪽 끝에서 왼쪽으로 작은 거리 δ만큼 떨어진 점으로 쓰면, 접할 조건이 주어진 방정식으로 바뀐다.

풀이

이제부터 다음과 같이 쓴다.

$$a = (4n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad b = (4n+5)\frac{\pi}{2} = a + 2\pi,$$

그러면 구간은 $a < x < b$이다. $\sin a = \sin b = 1$이므로 $\sin x$의 그래프는 꼭대기에서 시작하여 $x = a + \frac{\pi}{2}$에서 0으로 떨어지고, $x = a + \frac{3\pi}{2} = b - \frac{\pi}{2}$까지 음수이며, 그 뒤 b에서 다시 꼭대기로 올라간다.



그림($n = 1$일 때 실제 비율로 그렸으며, 원점은 왼쪽 멀리 있다)에서 청록색은 $\sin x$, 호박색은 $(a, 1)$을 지나는 직선, 자주색 실선은 접선(tangent line), 자주색 점선은 곡선과 세 번 만나는 더 완만한 직선이다.

가능한 근의 개수

$k > 0$이고 $x > 0$이므로 $kx > 0$이다. 따라서 모든 근은 $\sin x > 0$인 곳, 즉 $I_1 = (a, a + \frac{\pi}{2})$ 또는 $I_2 = (b - \frac{\pi}{2}, b)$에 있다.

I_1에서. 여기서 $\sin x$는 순감소(strictly decreasing)하고 kx는 순증가하므로 $kx - \sin x$는 순증가하며, 근은 많아야 하나이다. 오른쪽 끝에서 $kx - \sin x > 0$이고, $x = a$에서는 그 값이 $ka - 1$이다. 따라서 $ka < 1$이면 I_1에 근이 정확히 하나 있고, $ka \geq 1$이면 근이 없다(이때 구간 전체에서 $kx - \sin x > 0$이다).

I_2에서. $f(x) = \sin x - kx$라 하자. 여기서 $f''(x) = -\sin x < 0$이므로 f는 위로 볼록하고, I_2에서 영점이 많아야 둘이다. 또 왼쪽 끝에서 $f < 0$이고 $f(b) = 1 - kb$이다.

- $kb < 1$이면 f는 음수에서 양수로 가는데, 위로 볼록한 함수는 올라가는 동안 부호가 한 번만 바뀔 수 있으므로 근은 정확히 하나이다. $kb = 1$일 때도 마찬가지이다. 이때 $f(b) = 0$이고 $f'(b) = \cos b - k = -k < 0$이므로 b의 바로 왼쪽에서 $f > 0$이며, 따라서 I_2 내부에 근이 하나 있다(b 자체에서의 영점은 제외된다).
- $kb > 1$이면 양 끝에서 $f < 0$이므로, I_2에서 f의 최댓값이 음수인지, 영인지, 양수인지에 따라 근은 각각 0, 1, 2개이다. 값이 0인 경우가 접하는 경우이다. 즉 직선이 어떤 점 $t \in I_2$에서 봉우리에 접하며, 이때의 기울기를 k_t라 하자. k가 큰 값에서부터 줄어들면 직선이 내려오므로, $k > k_t$이면 근이 없고, $k = k_t$이면 하나, $\frac{1}{b} < k < k_t$이면 둘이다.

접점에서 $k_t t = \sin t < 1$이고 $t > a$이므로 $k_t < 1/a$이다. 또 접하는 경우는 $kb > 1$이므로 $k_t > 1/b$이다. 두 구간을 합치면 다음과 같다.

k의 범위	I_1의 근	I_2의 근	합계
$k \le 1/b$	1	1	2
$1/b < k < k_t$	1	2	3
$k = k_t$	1	1	2
$k_t < k < 1/a$	1	0	1
$k \ge 1/a$	0	0	0

따라서 방정식은 주어진 구간에서 근을 0, 1, 2, 3개 가질 수 있고, 이것이 보여야 할 내용이다.

근이 정확히 하나인 경우

표에서 근이 정확히 하나인 것은 바로 $k_t < k < \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$일 때이다. 이제 k_t를 설명하면 된다.

? 생각해 보기 "직선이 곡선에 접한다"를 어떻게 식으로 바꿀까?

직선 $y = kx$가 $x = t$에서 $y = \sin x$에 접한다는 것은 두 그래프가 그 점에서 만나고 **동시에** 기울기가 같다는 뜻이다.

$$\sin t = k_t t, \qquad \cos t = k_t.$$

점 t는 I_2에 있으므로 $t = b - \delta, 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$로 쓰자. $\sin b = 1$이고 $\cos b = 0$이므로

$$\sin t = \sin(b-\delta) = \cos\delta, \qquad \cos t = \cos(b-\delta) = \sin\delta.$$

따라서 기울기 조건에서 $k_t = \sin\delta$를 얻고, 만나는 조건은 다음이 된다.

$$\cos\delta = \left((4n+5)\frac{\pi}{2} - \delta\right)\sin\delta.$$

그러므로 근이 정확히 하나인 것은

$$\sin\delta < k < \frac{2}{(4n+1)\pi},$$

일 때이며, 여기서 δ는 위에서 설명한 것이다. 이것이 보여야 할 내용이다.

큰 n에 대한 근사

δ에 대한 방정식을 $\sin\delta$로 나누면(그 값은 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$이므로 영이 아니다)

$$\cot\delta = b - \delta, \qquad \text{즉} \qquad \tan\delta = \frac{1}{b-\delta}.$$

$\delta < \frac{\pi}{2}$이므로 우변은 $1/(b - \frac{\pi}{2})$보다 작고, 이 값은 n이 클 때 작다. 따라서 δ는 작고 $\tan\delta \approx \delta, b - \delta \approx b$이므로

$$\delta \approx \frac{1}{b} = \frac{2}{(4n+5)\pi}.$$

다음 근사를 위해 $\delta = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c}{b^3}$로 놓고 양변에서 b^{-3}까지의 항을 남긴다. 좌변은 $\tan\delta = \delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \cdots = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c+\frac{1}{3}}{b^3} + \cdots$이다. 우변은

$$\frac{1}{b-\delta} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\delta}{b} + \cdots\right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^3} + \cdots,$$

이며, 보정항에서는 $\delta \approx 1/b$를 썼다. b^{-3} 항을 비교하면 $c + \frac{1}{3} = 1$이므로 $c = \frac{2}{3}$이고

$$\delta \approx \frac{1}{b} + \frac{2}{3b^3} = \frac{2}{(4n+5)\pi} + \frac{16}{3(4n+5)^3\pi^3}.$$

(같은 결과를 다른 방법으로 얻을 수도 있다. $\delta = 1/b$에서 출발하여 반복(iteration) $\delta \mapsto \arctan\dfrac{1}{b-\delta}$을 한 번 적용하면 $\arctan\dfrac{b}{b^2-1}$을 얻는데, 이것도 같은 전개를 갖는다.) 따라서 k의 구간의 아래쪽 끝은 $\sin\delta \approx \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2b^3}$이다.

검산

- $n = 1$일 때 $\cos\delta = (\frac{9\pi}{2} - \delta)\sin\delta$를 수치적으로 풀면 $\delta = 0.070973$이고, $1/b = 0.070736$, $1/b + 2/(3b^3) = 0.070971$이다. 개선된 근사가 약 150배 더 가깝다. $n = 10$이면 오차는 약 5×10^{-10}으로 줄어든다.
- $n = 1, 2, 3, 5$와 표의 각 행에서 고른 k 값에 대해 촘촘한 격자 위에서 $kx - \sin x$의 부호 변화를 세면 예측대로 정확히 $2, 3, 1, 0$개의 근이 나오고, $\sin\delta$와 $2/((4n+1)\pi)$ 사이의 임의의 k에 대해서는 항상 근이 하나 나온다.

흔한 실수

- 접하는 경우를 빠뜨리거나 $1/b$, k_t, $1/a$의 대소 순서를 잘못 잡아 개수를 엉망으로 세는 것.
- 두 번째 근사에서 $\tan\delta \approx \delta$만 써서 $\delta \approx b/(b^2-1) \approx 1/b + 1/b^3$을 얻는 것. $\tan\delta$의 $\frac{1}{3}\delta^3$ 항은 보정항과 같은 차수이므로 반드시 남겨야 한다.

STEP 너머

작거나 큰 매개변수가 있는 방정식의 근에 대해 점점 더 나은 근사를 얻는 것을 **점근 해석**(*asymptotic analysis*)이라 한다. 여기서 한 것과 똑같이 $1/b$의 거듭제곱으로 된 급수를 대입하고 계수를 비교한다. 같은 아이디어를 $\tan x = x$에 적용하면 이 방정식의 큰 근들을 기술할 수 있는데, 이 근들은 열 흐름과 진동 문제에서 나타난다. 이런 전개 뒤에 있는

해석학을 더 알고 싶다면 Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*를 보라. Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*에는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.