풀이

STEP III 1990, 문제 1

순수수학 • 배각과 다항식의 근

> **STEP III 1990, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q1

핵심 아이디어

9는 3×3이므로 탄젠트의 삼배각 공식(triple-angle formula)을 두 번 쓰면 $\tan 9\theta$를 얻을 수 있다. 이는 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^9$을 전개하는 것보다 훨씬 수고가 적다. 또한 인수분해(factorisation)된 형태를 보면 $\theta = \pi/9, 2\pi/9, 4\pi/9$에서 어느 인수가 0이 되는지도 알 수 있다. 이 각들은 바로 $\tan^2 3\theta = 3$이 되는 각들이다. 여기서 $u = \tan^2\theta$에 대한 삼차방정식(cubic)을 얻고, 나머지는 비에트(Vieta)의 공식(Vieta's formulas, 다항식의 근과 계수 사이의 관계)이 해결해 준다.

풀이

$\tan 9\theta$에 대한 공식

$t = \tan\theta$, $T = \tan 3\theta$라 하자. 삼배각 공식은 $\tan(2\theta + \theta)$로부터, 또는 $n = 3$일 때의 드무아브르(de Moivre) 정리로부터 얻을 수 있으며, 다음을 준다.

$$T = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t(t^2 - 3)}{3t^2 - 1}, \qquad \tan 9\theta = \frac{3T - T^3}{1 - 3T^2} = \frac{T(3 - T^2)}{1 - 3T^2}.$$

이제 $3 - T^2$과 $1 - 3T^2$을 공통분모 $(1-3t^2)^2$ 위에 쓴다.

$$\begin{aligned}(1-3t^2)^2(3-T^2) &= 3(1-3t^2)^2 - t^2(3-t^2)^2 \\ &= (3 - 18t^2 + 27t^4) - (9t^2 - 6t^4 + t^6) \\ &= -(t^6 - 33t^4 + 27t^2 - 3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-3t^2)^2(1-3T^2) &= (1-3t^2)^2 - 3t^2(3-t^2)^2 \\ &= (1 - 6t^2 + 9t^4) - (27t^2 - 18t^4 + 3t^6) \\ &= -(3t^6 - 27t^4 + 33t^2 - 1).\end{aligned}$$

비를 취하면 인수 $-(1-3t^2)^{-2}$가 약분되므로

$$\tan 9\theta = \frac{t(t^2-3)}{3t^2-1} \cdot \frac{t^6 - 33t^4 + 27t^2 - 3}{3t^6 - 27t^4 + 33t^2 - 1},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

대신 드무아브르 정리를 쓰면 $\tan 9\theta = \operatorname{Im}(1+\mathrm{i}t)^9 / \operatorname{Re}(1+\mathrm{i}t)^9$이다. 그러면

$$9t - 84t^3 + 126t^5 - 36t^7 + t^9 \quad \text{과} \quad 1 - 36t^2 + 126t^4 - 84t^6 + 9t^8$$

이 각각 위의 분자와 분모로 인수분해된다는 것을 확인해야 한다. 실제로 그렇게 되지만, $\tan 3\theta$를 거치는 방법은 인수분해를 공짜로 안겨 준다.

삼차방정식

$P(t) = t^6 - 33t^4 + 27t^2 - 3$이라 하자. 위의 첫 번째 계산에 따르면

$$3 - \tan^2 3\theta = -\frac{P(t)}{(1-3t^2)^2} \qquad \text{단, } 3t^2 \neq 1.$$

이제 $\theta = \pi/9,\ 2\pi/9,\ 4\pi/9$로 놓자. 그러면 $3\theta = \pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3$이고, 각 경우에 $\tan 3\theta = \pm\sqrt{3}$이므로 $\tan^2 3\theta = 3$이다. 각 경우에 3θ는 $\pi/6$의 홀수 배가 아니므로 $3t^2 \neq 1$이다(그렇지 않으면 $\tan 3\theta$가 정의되지 않는다). 따라서 세 각 모두에 대해 $P(\tan\theta) = 0$이다.

이 각들은 $(0, \pi/2)$에서 t나 $t^2 - 3$이 아니라 인수 P 때문에 $\tan 9\theta = 0$이 되는 바로 그 각들이다. 실제로 $t \neq 0$이고, $\theta \neq \pi/3$이므로 $t^2 \neq 3$이다.

? **생각해 보기** 이 세 수가 삼차방정식의 모든 근이며 중근이 없다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

$u = t^2$으로 놓자. $\tan^2(\pi/9)$, $\tan^2(2\pi/9)$, $\tan^2(4\pi/9)$는 각각

$$u^3 - 33u^2 + 27u - 3 = 0.$$

의 근이다. tan는 $(0, \pi/2)$에서 양수이고 순증가하며 $\pi/9 < 2\pi/9 < 4\pi/9 < \pi/2$이므로, 세 값은 서로 다르다. 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이므로, 이 세 값이 정확히 그 근들이다. 이것이 구하려던 정수 계수의 삼차방정식이다.

곱

비에트의 공식에 의해 $u^3 - 33u^2 + 27u - 3$의 근들의 곱은 3이다.

$$\tan^2\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 3.$$

세 각 모두 $(0, \pi/2)$에 있으므로 각 탄젠트는 양수이고, 따라서 양의 제곱근을 취한다.

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = \sqrt{3}.$$

여섯제곱의 합

근을 u_1, u_2, u_3이라 하자. 삼차방정식으로부터

$$e_1 = u_1 + u_2 + u_3 = 33, \qquad e_2 = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 27, \qquad e_3 = u_1u_2u_3 = 3.$$

우리가 구하려는 것은 $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$이며, 이는 탄젠트들의 여섯제곱의 합이다.

> **생각해 보기** 근을 구하지 않고 e_1, e_2, e_3으로부터 세제곱의 합을 어떻게 얻을 수 있는가?

각 근은 $u_i^3 = 33u_i^2 - 27u_i + 3$을 만족한다. 이 세 식을 더하면

$$\sum u_i^3 = 33\sum u_i^2 - 27\sum u_i + 9.$$

이다. 여기서 $\sum u_i = 33$이고,

$$\sum u_i^2 = e_1^2 - 2e_2 = 1089 - 54 = 1035.$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\sum u_i^3 &= 33 \times 1035 - 27 \times 33 + 9\\ &= 34155 - 891 + 9\\ &= 33273.\end{aligned}$$

즉,

$$\tan^6\left(\tfrac{\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{2\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 33273,$$

이며, 이것이 구하려던 결과이다. 같은 이야기로, $\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 35937 - 2673 + 9$이다.

검산

- 수치로 계산하면 $\tan^2(\pi/9) \approx 0.1325$, $\tan^2(2\pi/9) \approx 0.7041$, $\tan^2(4\pi/9) \approx 32.163$이다. 이들의 합은 33.000이고, 곱은 3.000이다.
- 세 탄젠트의 곱은 $1.7320508\ldots = \sqrt{3}$이다.
- 위 세 값의 세제곱의 합은 33273.0이다. 그 대부분은 $\tan^6(4\pi/9) \approx 33272.4$에서 나온다.
- $\tan 9\theta$에 대한 공식은 수천 개의 무작위 θ 값에서 계산기와 약 12자리 유효숫자(significant figures)까지 일치한다.
- 작은 경우: $t = 1$, 즉 $\theta = \pi/4$로 놓자. 공식은 $\frac{1\cdot(-2)(-8)}{2\cdot 8} = 1 = \tan(9\pi/4)$를 준다.

흔한 실수

- 6차 인수(sextic factor)가 0이 된다고 결론짓기 전에 $3t^2 \neq 1$인지(즉 분모가 0이 아닌지) 확인하는 것을 잊는다.
- 곱으로 $-\sqrt{3}$을 택한다. 모든 각이 예각(acute)이므로 모든 탄젠트는 양수이다.
- $+3e_3$ 항을 빠뜨리고 $\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2$로 써서 33264를 얻는다.

STEP 너머

삼차식 $u^3 - 33u^2 + 27u - 3$은 유리근을 갖지 않으므로 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약(irreducible)이다. 또한 이 삼차식은 세 개의 실근을 갖는다. 갈루아(Galois) 이론(Galois theory)에 따르면 이런 삼차식의 근은 실수 거듭제곱근(radicals)만으로는 나타낼 수 없다(*casus irreducibilis*, 환원 불능의 경우). 그래서 $\tan^2(\pi/9)$ 같은 삼각함수 표현이 이 근들을 적는 자연스러운 방법이다. 근의 거듭제곱의 합은 일반적으로 뉴턴(Newton)의 항등식(Newton's identities)이 지배한다. 드무아브르 정리의 기하학적 측면에 대해서는 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)를 읽어 보라. 대수적 측면에 대해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.