풀이

STEP II 1990, 문제 9

순수수학 • 극곡선과 곡선의 길이

STEP II 1990, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q9

핵심 아이디어

두 곡선 모두 r이 θ에 대한 식으로 주어져 있으므로, 반직선(ray)마다 비교한다. 원점에서 나가는 각 반직선 위에 포물선(parabola)의 점은 정확히 하나 있고, 그 점은 심장형(cardioid)의 안쪽에 있거나 바깥쪽에 있다. 이것으로 포물선이 심장형 안으로 들어가고 나오는 곳을 곧바로 알 수 있다. 길이를 구할 때 심장형은 극좌표(polar coordinates) 형태 그대로 두는 것이 가장 좋고(호의 길이(arc length) 피적분함수가 반각 공식(half-angle identity)으로 간단해진다), 포물선은 직교좌표(Cartesian coordinates) 형태로 다루는 편이 훨씬 쉽다.

풀이

두 곡선

포물선에서 $r + r\cos\theta = 1$은 $r = 1 - x$를 뜻한다. 양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 = (1-x)^2$이므로

$$y^2 = 1 - 2x.$$

이것은 초점(focus)이 원점이고 꼭짓점(vertex)이 $(\frac{1}{2}, 0)$이며 왼쪽으로 열린 포물선이다. 원점은 포물선의 오목한 쪽, 즉 $y^2 < 1 - 2x$인 쪽에 있다. 이쪽을 포물선의 안쪽이라 하자.

심장형 $r = 4(1 + \cos\theta)$는 원점에 첨점(cusp)이 있고($\theta = \pi$일 때), $\theta = 0$일 때 $x = 8$에 이른다.

두 곡선이 만나는 곳

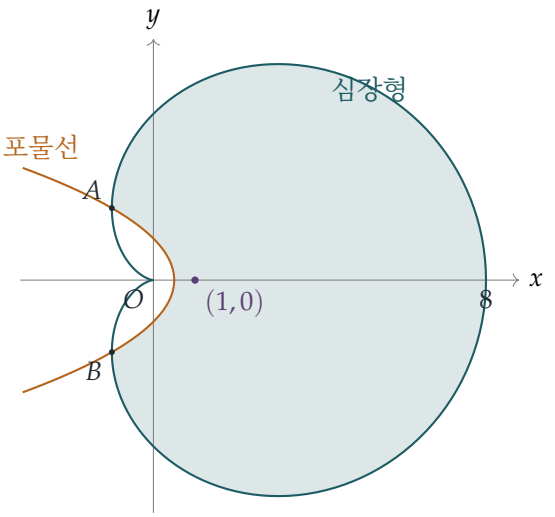
$-\pi < \theta < \pi$인 방향 θ를 하나 고정하면 $1+\cos\theta > 0$이다. 그 반직선 위에서 포물선은 거리 $1/(1+\cos\theta)$에 있고 심장형의 경계는 거리 $4(1+\cos\theta)$에 있으며, 심장형의 내부는 반직선에서 경계 앞쪽의 선분이다. 따라서 포물선의 점이 심장형 안에 있을 필요충분조건은

$$\frac{1}{1+\cos\theta} < 4(1+\cos\theta) \iff (1+\cos\theta)^2 > \tfrac{1}{4} \iff \cos\theta > -\tfrac{1}{2} \iff |\theta| < \tfrac{2\pi}{3},$$

이다. 여기서 양수 $1+\cos\theta$를 곱하고 양의 제곱근을 취했다. 등호는 $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$에서 성립하고 이때 $r = 2$이므로, 두 교점은

$$A = (-1, \sqrt{3}), \qquad B = (-1, -\sqrt{3}).$$

이다. 따라서 포물선은 B에서 꼭짓점 $(\frac{1}{2}, 0)$을 지나 A까지 끊어지지 않은 하나의 호를 따라 심장형 안에 있고, 그 밖의 모든 곳에서는 심장형 바깥에 있다. 이 하나의 호가 심장형 경계의 두 점을 잇므로, 심장형의 내부를 두 부분으로 나눈다. 하나는 포물선 안쪽 부분(원점을 포함하고, 첨점 근처의 심장형 작은 고리로 둘러싸인 부분)이고, 다른 하나는 포물선 바깥쪽 부분(심장형의 큰 바깥 호로 둘러싸인 부분)이다.



(그림에서 보이는 깔끔한 사실 하나: $x = 4(1+\cos\theta)\cos\theta = (2\cos\theta+1)^2 - 1 \geq -1$이므로, A와 B는 심장형에서 가장 왼쪽에 있는 점이기도 하다.)

경계의 길이

$r = 1, \theta = 0$인 점은 $(1,0)$이다. 이 점은 심장형 안에 있고$(1 < 8)$ 포물선 바깥에 있으므로$(0^2 > 1-2)$, 색칠한 부분에 속한다. 이 부분의 경계는 심장형의 호 $-\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$와 B에서 A까지의 포물선 호로 이루어진다.

심장형의 호. 극좌표에서 $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$이다. 여기서 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -4\sin\theta$이므로

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = 16(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta) = 32(1+\cos\theta) = 64\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

> **생각해 보기** 그냥 $\sqrt{64\cos^2(\theta/2)} = 8\cos(\theta/2)$라고 써도 될까?

구간 전체에서 $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$이기 때문에만 그렇다. $|\theta| \leq \frac{2\pi}{3}$이면 $|\frac{\theta}{2}| \leq \frac{\pi}{3}$이다. x축에 대한 대칭(symmetry)을 이용하면

$$L_{\text{cardioid}} = 2\int_0^{2\pi/3} 8\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32\Big[\sin\tfrac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi/3} = 32\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}.$$

포물선의 호. y를 매개변수(parameter)로 쓴다. $x = \frac{1}{2}(1-y^2)$이므로 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = -y$이고 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$이며, y는 $-\sqrt{3}$에서 $\sqrt{3}$까지 움직인다. 대칭에 의해

$$L_{\text{parabola}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$y = \sinh u$, $\mathrm{d}y = \cosh u\,\mathrm{d}u$로 치환하면 피적분함수는 $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$가 되므로

$$\int \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sinh 2u = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}) + C.$$

$y = \sqrt{3}$에서 $\sqrt{1+y^2} = 2$이고 $\operatorname{arsinh}\sqrt{3} = \ln(\sqrt{3}+2)$이므로

$$L_{\text{parabola}} = \Big[\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}\Big]_0^{\sqrt{3}} = \ln(2+\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}.$$

전체. 더하면

$$L = 16\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- 심장형 전체의 길이는 $\int_{-\pi}^{\pi} 8\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32$이고, 우리가 쓴 바깥 호 $16\sqrt{3} \approx 27.71$은 그 대부분을 차지한다. 이는 그림과 일치한다. 첨점 근처의 작은 고리의 길이는 $32 - 16\sqrt{3} \approx 4.29$이다.
- 포물선 호의 길이는 약 4.78로, B에서 꼭짓점 $(\frac{1}{2}, 0)$을 거쳐 A로 가는 두 선분의 길이의 합 $2\sqrt{1.5^2+3} \approx 4.58$보다 조금 길다. 당연히 그래야 한다.
- 두 곡선의 극좌표 호의 길이 피적분함수를 중점 규칙(midpoint rule)으로 수치 적분하면 합계가 32.49387이 나와, $18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) \approx 32.49387$과 일치한다.

흔한 실수

- 엉뚱한 부분을 택하는 실수: $(1, 0)$은 포물선 바깥($\text{꼭짓점 } x = \frac{1}{2}$의 오른쪽)에 있으므로, 그 경계에는 첨점 근처의 고리가 아니라 심장형의 큰 바깥 호가 쓰인다.
- 심장형을 $8\cos\frac{\theta}{2}$로 0에서 2π까지 한 번에 적분하는 실수: 이 식은 $\theta > \pi$에서 음수가 된다. 피적분함수는 $8|\cos\frac{\theta}{2}|$이다.

STEP 너머

두 곡선은 모두 극(pole)에 초점이나 첨점을 둔 원뿔곡선(conic) 또는 리마송(limaçon)이며, $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$는 태양을 초점에 둔 궤도 역학(orbital mechanics)에서 원뿔곡선이 나타나는 형태이다. 호의 길이 공식 $\int \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\theta$는 매개곡선의 길이 $\int |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$의 특수한 경우이며, 이는 대학 1학년 벡터 미적분학(vector calculus)에서 곡률(curvature)과 선적분(line integral)으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 원뿔곡선의 극좌표 형태를 이용해 케플러(Kepler)의 궤도를 유도한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.