풀이

STEP II 1990, 문제 8

순수수학 • 부분적분

> **STEP II 1990, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q8

핵심 아이디어

미분방정식(differential equation)의 각 항은 완전도함수(exact derivative)이거나 거의 그러하다. $t = 0$과 $t = 1$에서 y와 y'이 같은 값을 가지므로, 이러한 완전도함수를 적분하면 0이 된다. 각 관계식은 방정식에 적절한 함수를 곱한 다음, 모든 경계항(boundary term)이 사라질 때까지 부분적분(integration by parts)을 하여 얻는다. 경계항을 없애 주는 사실들을 목록으로 정리해 두자: $x(0) = 0$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$, 그리고 (증명한 뒤에는) $x(1) = 0$.

풀이

첫 번째 항등식

$x' = y$이므로 피적분함수 $xy = xx'$은 $\frac{1}{2}x^2$의 도함수이다. 따라서

$$\int_0^1 x(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}x(t)^2\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}[x(1)]^2,$$

이다. 여기서 $x(0) = \int_0^0 y(u)\,\mathrm{d}u = 0$임을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

$x(1) = 0$ 보이기

$(*)$의 가운데 항을 완전도함수로 쓰자:

$$(y^2 - 1)\,y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{3}y^3 - y\right).$$

이제 $(*)$를 0부터 1까지 항별로 적분한다:

$$\left[y'\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{3}y^3 - y\right]_0^1 + \int_0^1 y\,\mathrm{d}t = 0.$$

첫 번째 괄호는 $y'(1) - y'(0) = 0$이고, 두 번째 괄호는 $y(1) = y(0)$이므로 0이다. 남은 적분은 x의 정의에 의해 $x(1)$이다. 따라서 $x(1) = 0$이다.

관계식 $\int y^2 = \frac{1}{3}\int y^4$

$(*)$에 x를 곱하고 $[0,1]$에서 적분한다. 적분이 세 개 생기는데, 하나씩 차례로 다룬다.

마지막 항. 첫 번째 항등식과 $x(1) = 0$에 의해

$$\int_0^1 x\,y\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}[x(1)]^2 = 0.$$

y'' 항. x를 미분하는 쪽으로 하여 부분적분한다($x' = y$이다):

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,y''\,\mathrm{d}t &= \Big[x\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y\,y'\,\mathrm{d}t \\ &= x(1)y'(1) - x(0)y'(0) - \Big[\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0,\end{aligned}$$

이는 $x(1) = x(0) = 0$이고 $y(1) = y(0)$이기 때문이다.

> **생각해 보기** $x\,(y^2-1)\,y'$을 어떻게 부분적분해야 할까? 어느 인수를 적분해야 할까?

가운데 항. 이미 $\frac{1}{3}y^3 - y$의 도함수임을 알고 있는 인수 $(y^2-1)y'$을 적분하고, x를 미분한다:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,(y^2-1)\,y'\,\mathrm{d}t &= \Big[x(\tfrac{1}{3}y^3 - y)\Big]_0^1 - \int_0^1 y(\tfrac{1}{3}y^3 - y)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

x가 양 끝점에서 모두 0이므로 경계항은 사라진다.

세 부분을 더하면 0이 된다:

$$\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{즉,} \qquad \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\int_0^1 [y(t)]^4\,\mathrm{d}t,$$

이므로 구하는 결과를 얻는다.

관계식 $\int y'^2 = \int y^2$

> **생각해 보기** y'^2의 적분을 얻고 싶다. 어떤 함수를 곱하면 그것이 나올까?

$y\,y''$을 부분적분하면 $-\int y'^2$이 나오므로, 이번에는 $(*)$에 y를 곱하고 적분한다. 각 항을 차

례로 계산하면 다음과 같다:

$$\int_0^1 y\,y''\,\mathrm{d}t = \Big[y\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^1 (y^3 - y)\,y'\,\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0.$$

y와 y'이 모두 같은 값을 반복하므로 경계항 $y(1)y'(1) - y(0)y'(0)$은 0이다. 둘째 줄은 $y(1) = y(0)$이므로 0이 된다. 남는 것은

$$-\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{따라서} \qquad \int_0^1 [y'(t)]^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

검산

첫 번째 항등식은 임의의 y에 대해 성립한다. $y = \cos 3t + t^2 - 0.7e^t$로 두고 수치적분(quadrature)을 하면 $\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t \approx 0.338191$을 얻는데, 이는 $\frac{1}{2}x(1)^2$과 같다.

시간 1마다 반복되는 $(*)$의 자명하지 않은 해는 존재하지 않는다(아래 참고). 그러나 시간 T마다 반복되는 임의의 해에 대해서는 같은 논증이 $[0, T]$에서 그대로 성립한다. $(*)$를 수치적으로 적분하여 주기궤도(periodic orbit)에 도달시켰고, 그 주기는 $T \approx 6.6633$이다. 한 주기에 걸쳐 $\int y \approx 10^{-9}$, $\int y^2 \approx 13.72222$, $\frac{1}{3}\int y^4 \approx 13.72222$, $\int y'^2 \approx 13.72228$을 얻었으며, 이 값들은 스텝 크기에 따른 오차 범위 안에서 일치한다.

흔한 실수

- 세 번째 부분에서 $x(1) = 0$이 필요하다는 것을 잊는 경우. 이것이 없으면 $\int xy$도, 경계항도 사라지지 않는다.
- 가운데 항에서 $(y^2 - 1)y'$ 대신 x를 적분하는 경우. $x' = y$를 이용해야 적분이 y의 거듭제곱들로 정리된다.
- 경계항이 "$y(0) = 0$이므로" 0이라고 말하는 경우. 그런 조건은 주어지지 않았다. 경계항이 사라지는 것은 0과 1에서의 값이 서로 같기 때문이다.

STEP 너머

방정식 $(*)$는 반 데르 폴 진동자(van der Pol oscillator)로, 스스로 진동을 유지하는 전기 회로의 고전적인 모형이다. 이 방정식은 주기궤도를 단 하나 가지며, 여러분이 증명한 관계식들은 한 주기에 걸친 에너지 균형을 나타낸다. 이 관계식들은 또한 뜻밖의 사실을 드러낸다. $\int_0^1 y = 0$이므로, 푸리에 급수(Fourier series)에서 나오는 비르팅거(Wirtinger) 부등식(또는 푸앵카레(Poincaré) 부등식)에 의해 $\int_0^1 y'^2 \geq 4\pi^2 \int_0^1 y^2$이다. 이를 마지막 관계식과 함

께 쓰면 $y \equiv 0$일 수밖에 없다. 따라서 시간 1마다 반복되는 해는 자명해뿐인데, 실제 주기가 약 6.66이기 때문이다. 주기궤도와 극한순환(limit cycle)에 대해 더 알고 싶다면 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.