풀이

STEP II 1990, 문제 7

순수수학 • 미분방정식

STEP II 1990, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q7

핵심 아이디어

지수함수 꼴의 시험해(trial solution)를 대입하면 지연 방정식(delay equation)이 p에 대한 보통의 방정식으로 바뀐다. 시간을 이동하는 것은 e^{pt}에 상수를 곱하는 것에 지나지 않기 때문이다. 방정식 $(*)$에는 p와 e^{-p}가 섞여 있어서 정확히 풀 수는 없지만, 양변에 e^{p}를 곱하면 p에 관한 부분이 모두 한쪽으로 모인다. 즉 근은 하나의 곡선 $y = (p+1)\mathrm{e}^{p}$가 수평선 $y = k$와 만나는 점이다. 따라서 근의 개수를 세는 문제는 곡선 하나를 그리는 문제로 귀결된다.

풀이

p에 대한 방정식

$A \neq 0$으로 두고 $\mathrm{f}(t) = A\mathrm{e}^{pt}$라 하자(영이 아닌 해를 원하기 때문이다). 그러면 $\mathrm{f}'(t) = pA\mathrm{e}^{pt}$이고 $\mathrm{f}(t-1) = A\mathrm{e}^{p(t-1)} = \mathrm{e}^{-p}\,A\mathrm{e}^{pt}$이므로, $(\dagger)$는 다음과 같이 된다.

$$A\mathrm{e}^{pt}(p+1-k\mathrm{e}^{-p}) = 0 \quad \text{모든} t.$$

$A \neq 0$이고 $\mathrm{e}^{pt} > 0$이므로, 이 식이 모든 t에 대하여 성립할 필요충분조건은

$$p+1 = k\mathrm{e}^{-p},$$

이고, 이것이 바로 $(*)$이다. 따라서 이러한 해는 p가 $(*)$의 실근일 때, 그리고 그때에만 존재하며, 이때 A는 아무 값이어도 된다.

실근은 몇 개인가?

$(*)$의 양변에 $e^p > 0$을 곱하면 다음과 동치인 방정식을 얻는다.

$$g(p) = k, \qquad \text{여기서} g(p) = (p+1)e^p.$$

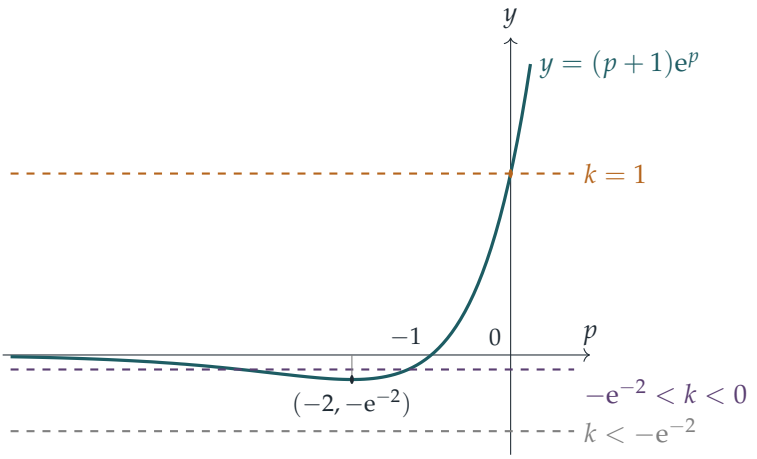
그러므로 곡선 $y = g(p)$와 수평선 $y = k$의 교점의 개수를 세면 된다.

> **생각해 보기** $y = (p+1)e^p$의 그래프는 어떤 모양인가? 어디에서 가장 작고, 양 끝에서는 어떻게 되는가?

미분하면 $g'(p) = e^p + (p+1)e^p = (p+2)e^p$이고, 이는 $p < -2$에서 음수, $p > -2$에서 양수이다. 따라서 g는 $(-\infty, -2]$에서 감소하고 $[-2, \infty)$에서 증가하며, 전역 최솟값(global minimum)은

$$g(-2) = -e^{-2}.$$

이다. 양 끝에서는 $p \to \infty$일 때 $g(p) \to \infty$이고, $p \to -\infty$일 때 $g(p) \to 0$이다(지수적 감쇠가 일차적 증가를 이긴다). $p < -1$에서는 인수 $p+1$이 음수이므로 g는 아래쪽에서 0에 다가간다. 곡선은 $p = -1$에서만 축과 만나고, $g(0) = 1$이다.



그림에서 읽어 내면 다음과 같다(앞에서 살펴본 단조성(monotonicity)이 이를 엄밀하게 뒷받침한다).

- $k > 0$: $(-\infty, -1]$에서는 $g \le 0 < k$이고, $(-1, \infty)$에서 g는 0에서 ∞까지 순증가하므로 근은 **정확히 하나**이며, 그 근은 $p > -1$을 만족한다.
- $-e^{-2} < k < 0$: $(-\infty, -2]$에서 g는 0에 가까운 값에서 $-e^{-2}$까지 순감소하므로 값 k를 한 번 갖는다. $[-2, -1]$에서는 $-e^{-2}$에서 0까지 순증가하므로 값 k를 한 번 더 갖는다. $p > -1$에서는 $g > 0 > k$이다. 따라서 근은 **두 개**이며, 하나는 $(-\infty, -2)$에, 다른 하나는 $(-2, -1)$에 있다.

- $k = -e^{-2}$: 직선이 곡선의 최솟점에서 접하므로 근은 $p = -2$ **하나**뿐이다.
- $k < -e^{-2}$: 직선이 곡선 전체보다 아래에 있으므로 근이 **없다**.

따라서 요구한 대로 $(*)$는 k에 따라 0개, 1개 또는 2개의 실근을 가지며, Ae^{pt} 꼴의 해가 존재할 필요충분조건은

$$k \geq -e^{-2}, \quad k \neq 0.$$

이다. (값 $k = 0$은 문제에서 제외되어 있다. 이 경우에는 근 $p = -1$ 하나만 나온다.)

해는 언제 감쇠하는가?

> **생각해 보기** 어떤 p에 대하여 $Ae^{pt} \to 0$이 되는가? 그리고 $(*)$를 풀지 않고 근이 0에 대해 어디에 있는지 어떻게 알아낼 수 있는가?

$A \neq 0$일 때, $t \to +\infty$에서 $Ae^{pt} \to 0$일 필요충분조건은 $p < 0$이다. 근을 명시적으로 구할 필요는 전혀 없고, 0에 대한 근의 위치만 알면 된다.

- $-e^{-2} \leq k < 0$이면 모든 근이 $(-\infty, -1)$에 있다(실제로 $p \geq -1$에서 $g \geq 0$이므로, $g(p) = k < 0$이면 반드시 $p < -1$이다). 이러한 해는 모두 감쇠한다.
- $k > 0$이면 유일한 근은 g가 순증가하는 구간에 있으므로 $p < 0 \iff g(p) < g(0) \iff k < 1$이다. $k = 1$이면 근은 $p = 0$이고 상수해 $f = A$가 나오는데, 이는 0으로 수렴하지 않는다. $k > 1$이면 근이 양수이므로 해는 커진다.

그러므로 $t \to +\infty$일 때 해가 0으로 수렴할 필요충분조건은

$$-e^{-2} \leq k < 1, \quad k \neq 0.$$

이다.

검산

- $k = 1$: $p = 0$은 $0 + 1 = 1 \cdot e^0$을 만족하고, $f = A$는 분명히 $f' + f - f(t-1) = 0$의 해이다. 마땅히 그래야 하듯이, 이것이 감쇠와 증가의 경계이다.
- $k = -e^{-2} \approx -0.1353$: $p = -2$를 대입하면 $-1 = -e^{-2}e^2$이다. 수치적으로 $k = -0.13$이면 -2의 양쪽에 두 근 $p \approx -2.311$과 $p \approx -1.742$가 있고, $k = -0.14$이면 근이 없다.
- 물리적 의미: 되먹임(feedback)이 없으면$(k \to 0)$ 계는 $f' = -f$이고 감쇠율은 $p = -1$인데, 이는 $|k|$가 작을 때 근이 놓이는 위치와 같다. 강한 양의 되먹임$(k > 1)$은 감쇠 효과를 이겨 내고, 해는 커진다.

흔한 실수

- $y = p + 1$과 $y = ke^{-p}$를 그려 비교하다가, $k < 0$일 때 직선이 곡선과 두 번 만나거나 전혀 만나지 않을 수 있다는 점을 놓치는 것. 접할 조건은 $g(p) = (p+1)e^{p}$를 쓰면 더 쉽게 찾을 수 있다.
- 끝점 $k = -e^{-2}$를 빠뜨리는 것. 이때는 실제로 (중)근 $p = -2$가 있으므로 감쇠하는 해가 존재한다.
- 감쇠하는 경우에 $k = 1$을 포함하는 것. $p = 0$이면 감쇠하는 해가 아니라 상수해가 나온다.

STEP 너머

방정식 (†)는 **지연 미분방정식**(*delay differential equation*)이고, (∗)는 그 특성방정식(characteristic equation)이다. 보통의 선형 상미분방정식(ODE)과 달리 이 방정식은 무한히 많은 **복소근** p를 가지며, 일반해는 이 근 모두로부터 만들어진다. 따라서 완전한 안정성을 얻으려면 모든 복소근의 실수부가 음수여야 하며, 이는 제어 이론(control theory)에서 연구된다. $(p+1)e^{p} = k$의 실근은 람베르트 W 함수(Lambert W function)의 값으로 나타난다. 즉 $p + 1 = W(k)$이며, $-e^{-1}$(여기서는 $ke = -e^{-1}$)은 정확히 W의 분기점(branch point)이다. 선형 상미분방정식과 특성방정식에 대해서는 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.