풀이

STEP II 1990, 문제 6

순수수학 • 정수 부등식과 분수

> **STEP II 1990, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q6

핵심 아이디어

모든 것은 정수에 관한 한 가지 사실에 기대고 있다. 정수 사이의 엄격한 부등식(strict inequality)은 1만큼 더 강하게 만들 수 있다. $a < b$이면 $b \geq a+1$이고, $d < c$이면 $d \leq c-1$이다. 이 사실 덕분에 (ii)는 한 줄짜리 어림이 된다. 이후의 소문항들은 교묘하게 고른 정수에 (ii)를 적용하는 것이다. 분수 부등식의 분모를 없앤 다음, 그렇게 얻은 정수 부등식을 다시 (ii)에 넣으면 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 모든 문자는 양의 정수를 나타낸다.

소문항 (i)

$b > a \geq 1$이고 b는 정수이므로 $b \geq 2$이다. 양변에 $c > 0$을 곱하면 $bc \geq 2c$를 얻는다.

$c > 1$이고 c는 정수이므로 $c \geq 2$이고, 따라서 $2c = c + c \geq c + 2$이다. 이를 합치면 $bc \geq 2c \geq 2 + c$이므로 원하는 결과가 나온다.

소문항 (ii)

부등식이 엄격하고 수들이 정수이므로 $b \geq a+1$이고 $d \leq c-1$이다. 첫 번째 부등식에서는 $c > 0$을, 두 번째 부등식에서는 $a > 0$을 이용하면

$$\begin{aligned} bc - ad &\geq (a+1)c - a(c-1) \\ &= ac + c - ac + a \\ &= a + c. \end{aligned}$$

따라서 $bc - ad \geq a + c$이고, 등호는 정확히 $b = a+1$이고 $d = c-1$일 때 성립한다.

(이것은 (i)에서 쓴 것과 같은 "1만큼 강하게 만들기" 기법이며, (i)은 몸풀기 문제이다. 이후에는 (i)이 다시 필요하지 않다.)

소문항 (iii)

$b, d > 0$을 이용하여 두 부등식의 분모를 없애면

$$\frac{a}{b} < p \iff a < bp, \qquad p < \frac{c}{d} \iff dp < c.$$

이제 b를 bp로, d를 dp로 바꾸어 (ii)를 적용한다(둘 다 양의 정수이다). 가정 $a < bp$와 $dp < c$는 정확히 우리가 가진 것이므로

$$(bp)c - a(dp) \geq a + c, \qquad \text{즉,} \qquad (bc - ad)p \geq a + c.$$

소문항 (iv)

분모(모두 양수이다)를 없애면 두 개의 정수 부등식을 얻는다.

$$aq < bp \qquad \text{그리고} \qquad dp < cq.$$

또한 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$이므로 $ad < bc$이고, $bc - ad$는 **양의** 정수이다. 따라서 부등호의 방향을 바꾸지 않고 이 수로 나눌 수 있다.

> **생각해 보기** (ii)에서 a, b, c, d의 역할을 어떤 네 수가 맡아야 할까?

우리에게는 엄격한 부등식이 두 개 있고, (ii)에 필요한 것도 정확히 두 개, 즉 "첫째 $<$ 둘째"와 "넷째 $<$ 셋째"이다. 이 둘을 짝짓는 자연스러운 방법이 두 가지 있으며, 각각에서 한 계가 하나씩 나온다.

p에 대한 한계. $aq < bp$를 "$a < b$" 부등식으로, $dp < cq$를 "$d < c$" 부등식으로 삼는다. (ii)를 aq, bp, cq, dp에 적용하면

$$(bp)(cq) - (aq)(dp) \geq aq + cq, \qquad \text{따라서} \qquad pq(bc - ad) \geq q(a + c).$$

$q > 0$으로 나누고, 다시 $bc - ad > 0$으로 나누면

$$p \geq \frac{a+c}{bc-ad}.$$

q에 대한 한계. 이번에는 역할을 바꾼다. $dp < cq$를 "$a < b$" 부등식으로, $aq < bp$를 "$d < c$" 부등식으로 삼는다. (ii)를 dp, cq, bp, aq에 적용하면

$$(cq)(bp) - (dp)(aq) \geq dp + bp, \qquad \text{따라서} \qquad pq(bc-ad) \geq p(b+d).$$

$p > 0$과 $bc - ad > 0$으로 나누면

$$q \geq \frac{b+d}{bc-ad}.$$

두 한계가 모두 증명되었다. ((iii)은 첫 번째 한계에서 $q = 1$인 특수한 경우이다.)

$8/9$와 $9/10$ 사이의 분수

$a = 8, b = 9, c = 9, d = 10$으로 놓는다. 그러면

$$bc - ad = 81 - 80 = 1,$$

이므로 $8/9$와 $9/10$ 사이에 엄격하게 놓인 분수 p/q(p, q는 양의 정수이며, 기약분수이든 아니든 상관없다)는 모두

$$p \geq \frac{8+9}{1} = 17, \qquad q \geq \frac{9+10}{1} = 19.$$

를 만족한다. 따라서 분모가 20보다 작다면 정확히 $q = 19$이어야 한다. 그러면

$$\frac{8}{9} < \frac{p}{19} < \frac{9}{10} \iff \frac{152}{9} < p < \frac{171}{10} \iff 16.88\ldots < p < 17.1,$$

이어야 하므로 $p = 17$이다. 그리고 $8 \cdot 19 = 152 < 153 = 9 \cdot 17$이고 $17 \cdot 10 = 170 < 171 = 9 \cdot 19$이므로 $17/19$는 실제로 이 구간에 놓인다.

따라서 $8/9$와 $9/10$ 사이에 있으면서 분모가 20보다 작은 분수는

$$\frac{17}{19}.$$

뿐이다. 한계 $q \geq 19$는 기약분수뿐 아니라 분수를 나타내는 모든 방법에 적용되므로, $34/38$처럼 약분되지 않은 꼴이 더 작은 분모로 끼어들 수도 없다.

검산

- $17/19$는 **중간수**(mediant) $\frac{8+9}{9+10}$이며, (iv)의 두 한계가 모두 이 분수에서 달성된다. 이는 한계가 최선(sharp)이라는 좋은 신호이다.

- 소수로 나타내면 $8/9 \approx 0.8889$, $17/19 \approx 0.8947$, $9/10 = 0.9$이다.
- (i)과 (ii)는 29까지의 모든 값에 대해, (iii)과 (iv)는 약 60,000개의 무작위 경우에 대해 확인했으며, $8/9$와 $9/10$ 사이에서 $q \leq 19$인 모든 p/q를 전수 조사로 나열했다. 나타나는 것은 $17/19$뿐이다.

흔한 실수

- (iv)에서 $bc - ad$로 나누기 전에 $bc - ad > 0$임을 밝히지 않는 것.
- 마지막 소문항에서 p에 대한 한계만 사용하는 것. 이 한계는 q가 19까지 가능함을 허용하지만, 그것만으로는 더 작은 분모를 배제하지 못한다. 실제로 일을 하는 것은 q에 대한 한계이다.
- (iv)에서 (ii)로부터 한계를 하나만 얻는 것. 두 번째 한계를 얻으려면 두 부등식의 역할을 서로 바꿔야 한다.

STEP 너머

$bc - ad = 1$인 두 분수 $a/b < c/d$를 **페리 이웃**(Farey neighbours)이라 부르며, 이 문제는 이들에 관한 핵심 사실, 즉 둘 사이에서 분모가 가장 작은 분수는 그 중간수 $\frac{a+c}{b+d}$라는 사실을 증명한다. 중간수를 반복해서 끼워 넣으면 페리 수열(Farey sequence)과 스턴–브로코 트리(Stern–Brocot tree)가 만들어지는데, 이들은 모든 양의 유리수를 정확히 한 번씩 나열하며 연분수(continued fraction) 및 실수의 최良 유리 근사와 밀접하게 연결되어 있다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*은 연분수와 근사에 대해 읽기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.