풀이

STEP II 1990, 문제 5

순수수학 • 복소수와 원

> **STEP II 1990, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q5

핵심 아이디어

원 $|z| = r$ 위에서 켤레(conjugation)는 나눗셈이 된다: $\bar{z} = r^2/z$. 이 덕분에 "이 비가 순허수(purely imaginary)이다"라는 조건(두 방향이 수직인지 판정하는 기준)이 $lm + pq = 0$이라는 깔끔한 다항식 조건으로 바뀐다. 그다음부터 문제의 나머지는 추적 과정이다. 수직인 현(chord) 하나하나가 $z \mapsto c/z$ 꼴의 공식으로 새로운 점을 주므로, 이 사상들을 합성하여 무엇이 나오는지 보기만 하면 된다.

풀이

수직 판정 기준

S의 반지름을 r라 하면 $|l| = |m| = |p| = |q| = r$이고, 따라서

$$\bar{l} = \frac{r^2}{l}, \qquad \bar{m} = \frac{r^2}{m}, \qquad \bar{p} = \frac{r^2}{p}, \qquad \bar{q} = \frac{r^2}{q}.$$

현 LM과 PQ의 방향은 각각 $l - m$과 $p - q$이며, 점들이 서로 다르므로 둘 다 0이 아니다. 0이 아닌 두 복소수가 서로 수직인 방향을 나타낼 필요충분조건은 그 몫이 순허수라는 것이므로,

$$w = \frac{l - m}{p - q}.$$

로 놓는다. 그러면 w가 순허수일 필요충분조건은 $w + \bar{w} = 0$이다. 이제

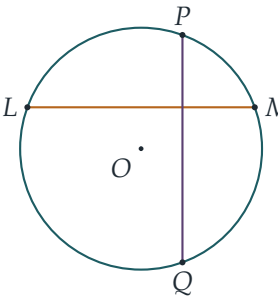
$$\bar{w} = \frac{r^2/l - r^2/m}{r^2/p - r^2/q} = \frac{(m - l)/(lm)}{(q - p)/(pq)} = \frac{l - m}{p - q} \cdot \frac{pq}{lm} = w\,\frac{pq}{lm},$$

이므로

$$w + \bar{w} = w\left(1 + \frac{pq}{lm}\right) = \frac{w}{lm}\,(lm + pq).$$

$w \neq 0$이고 $lm \neq 0$이므로, 이 값이 0이 될 필요충분조건은 $lm + pq = 0$이다. 따라서 요구한 대로 $LM \perp PQ$일 필요충분조건은 $lm + pq = 0$이다.

(수직이등분선(perpendicular bisector)을 이용하는 방법도 같은 아이디어에 기하학의 옷을 입힌 것이다. 현 LM의 수직이등분선은 O를 지나고, 현의 방향은 그 수직이등분선 방향의 i배이다.)



$l = re^{i\cdot 160^\circ}$, $m = re^{i\cdot 20^\circ}$
$p = re^{i\cdot 70^\circ}$, $q = re^{-i\cdot 70^\circ}$
$lm = -r^2$, $pq = r^2$

세 점

A_1, A_2, A_3을 a_1, a_2, a_3으로, A_1'을 z로 나타내자. 판정 기준에 따르면 "$A_1'A_2' \perp A_1A_2$"는 $z\,a_2' = -a_1a_2$를 뜻하므로

$$a_2' = -\frac{a_1a_2}{z}.$$

$|a_2'| = r \cdot r/r = r$이므로 이 점은 실제로 S 위에 있으며, 조건을 만족하는 S 위의 점은 이것뿐이다. 같은 방법으로

$$a_3' = -\frac{a_2a_3}{a_2'} = \frac{a_3}{a_1}\,z,$$

$$a_1'' = -\frac{a_3a_1}{a_3'} = -\frac{a_1^2}{z}.$$

따라서 $A_1'' = A_1'$일 필요충분조건은 $z = -a_1^2/z$, 즉

$$z^2 = -a_1^2 \iff z = \pm i\,a_1.$$

두 값 모두 절댓값(modulus)이 r이므로 S 위에 있고, $a_1 \neq 0$이므로 서로 다르다. 그러므로 A_1'의 위치는 정확히 두 곳이며, 이는 A_1을 O를 중심으로 $\pm 90^\circ$만큼 회전(rotation)시켜 얻는 점들이다.

생각해 보기 사상 $z \mapsto -a_1^2/z$는 원에 무엇을 하는가?

S 위에서는 $1/z = \bar{z}/r^2$이므로 $-a_1^2/z = -(a_1^2/r^2)\,\bar{z}$이고, 이는 켤레를 취한 뒤 회전하는 것, 곧 원을 한 지름에 대하여 반사(reflection)하는 것이다. 반사는 거울이 되는 지름의 양 끝점 두 개만을 고정하며, 그래서 해가 두 개인 것이다. 실제로 각 단계 $z \mapsto -a_ka_{k+1}/z$ 하나하나가 모두 이러한 반사이며, 이것으로 이후의 모든 내용이 설명된다.

네 점

마지막 단계에 a_4를 넣어 같은 추적을 계속하면

$$a_2' = -\frac{a_1 a_2}{z}, \qquad a_3' = \frac{a_3}{a_1} z,$$
$$a_4' = -\frac{a_3 a_4}{a_3'} = -\frac{a_1 a_4}{z}, \qquad a_1'' = -\frac{a_4 a_1}{a_4'} = z.$$

따라서 S 위에서 A_1'을 어떻게 잡든 $A_1'' = A_1'$이다.

n개의 점

k에 대한 수학적 귀납법(induction)으로, 추적하면

$$a_k' = \frac{a_k}{a_1} z \quad (k\text{가 홀수}), \qquad a_k' = -\frac{a_1 a_k}{z} \quad (k\text{가 짝수}),$$

를 얻는다. a_k'이 한 가지 꼴이면 $a_{k+1}' = -a_k a_{k+1}/a_k'$은 다른 꼴이 되기 때문이다. 마지막 단계는 $a_1'' = -a_n a_1 / a_n'$이다.

- n이 짝수이면 $a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{z}{-a_1 a_n} = z$이므로, 모든 A_1'에 대하여 A_1''은 A_1'과 일치한다.
- n이 홀수이면 $a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{a_1}{a_n z} = -\dfrac{a_1^2}{z}$이므로, $n = 3$일 때와 똑같이 A_1''이 A_1'과 일치하는 A_1'의 위치는 정확히 두 곳, 즉 $z = \pm \mathrm{i} a_1$이다.

말로 하면, 짝수 번의 반사는 회전이 되고 여기서는 그것이 항등변환(identity)으로 판명되며, 홀수 번의 반사는 반사가 되어 원 위에 고정점(fixed point)을 두 개 가진다.

검산

- 그림: $l = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 160^\circ}$, $m = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 20^\circ}$이면 현 LM은 수평이고, $p = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\cdot 70^\circ}$이면 현 PQ는 수직이다. 실제로 $lm = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -r^2 = -pq$이다.
- 수치적으로, 임의의 반지름을 가진 원 위의 임의의 점들과 3부터 9까지의 n에 대하여 수직인 현을 추적해 보면, 매 단계마다 S 위의 점이 다시 나왔고, n이 짝수일 때는 정확히 출발점으로 돌아왔으며, n이 홀수일 때는 원 둘레의 출발 위치 200 000개를 조사한 결과 고정점이 정확히 두 개, $\pm \mathrm{i} a_1$에서 발견되었다.

흔한 실수

- 수직 여부를 "w가 실수이다"로 판정하는 것. 평행한 현은 실수인 비를 주고, 수직인 현은 순허수인 비를 준다.

- $\bar{z} = r^2/z$가 $|z| = r$일 때만 성립한다는 것을 잊는 것. 네 점이 모두 O를 중심으로 하는 같은 원 위에 있다는 사실 덕분에 판정 기준이 이렇게 깔끔해진다.
- n개의 점의 경우에 답이 n의 홀짝성(parity)에 따라 달라진다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

원으로 제한한 사상 $z \mapsto c/z$는 반사이며, 반사를 합성하는 것은 등거리변환군(isometry group) 연구의 출발점이다. 원의 대칭은 직교군(orthogonal group) $O(2)$를 이루고, 이 군에서 두 반사를 합성하면 회전이 된다. $z \mapsto c/z$나 $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ 같은 사상은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)으로, 복소해석학(complex analysis)과 기하학에서 핵심적인 역할을 한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 두 관점을 모두 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.