풀이

STEP II 1990, 문제 4

순수수학 • 직선의 배치와 수학적 귀납법

> **STEP II 1990, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.1 절 **평면을 자르는 직선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/lazy-caterer.html

핵심 아이디어

그림을 직선 하나씩 차례로 살펴본다. 새 직선을 하나 추가하면, 이 직선은 기존의 모든 직선과 서로 다른 점에서 정확히 한 번씩 만나므로, 예측 가능한 개수의 조각으로 잘린다. 이 조각 하나하나는 두 가지 역할을 한다. 새로운 선분이 되는 동시에, 기존의 영역 하나를 둘로 나눈다. 새 직선 하나가 미치는 효과를 세면 점화식(recurrence)을 얻고, 이 점화식은 쉽게 합을 구할 수 있다.

풀이

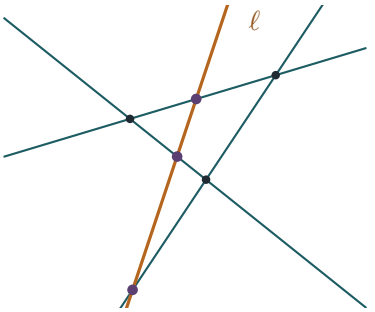
작은 경우

여기서 "선분(segment)"이란 한 직선 위에서 이웃한 두 교점 사이의 조각을 뜻하며, 각 직선 양 끝의 무한히 뻗는 두 조각(반직선(ray))도 포함한다. 또 직선이 하나뿐일 때는 직선 전체를 선분 하나로 센다. 처음 몇 가지 경우를 그려 보면 다음과 같다.

n	1	2	3	4
선분	1	4	9	16
영역	2	4	7	11

예를 들어 직선 세 개는 삼각형을 이룬다. 각 직선은 유한한 변 하나와 반직선 두 개로 잘리므로 선분은 9개이고, 영역(region)은 삼각형 자신, 삼각형의 변에 맞닿은 영역 세 개, 꼭짓

점에 맞닿은 영역 세 개로 모두 7개이다. 선분의 개수를 보면 n^2임을 짐작할 수 있다.



그림은 직선 세 개(청록색)와 네 번째 직선 ℓ(호박색)을 보여 준다. ℓ이 기존 직선들과 만나는 자주색 점 세 개가 ℓ을 네 조각으로 자르고, 각 조각이 기존의 일곱 영역 중 하나를 나누어 영역은 11개가 된다.

선분의 개수

n개의 직선 중 하나를 고정한다. 어떤 두 직선도 평행(parallel)하지 않으므로 이 직선은 나머지 $n-1$개의 직선과 각각 만나고, 어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 않으므로(공점(concurrent)이 아니므로) 이 $n-1$개의 교점은 모두 서로 다르다(두 교점이 일치한다면 그 점에서 세 직선이 만나게 된다). 따라서 이 직선 위에는 서로 다른 $n-1$개의 점이 있고, 이 점들이 직선을 n개의 조각, 즉 유한한 선분 $n-2$개와 반직선 2개로 자른다. 이를 n개의 직선 각각에 대해 하면

$$\text{선분의 개수} = n \cdot n = n^2.$$

각 선분은 정확히 한 직선 위에 있으므로 한 번씩만 세어진다.

수학적 귀납법(induction)을 선호한다면, 선분의 개수를 $S(n)$이라 하자. 일반 위치(general position)에 있는 $n-1$개의 직선에 n번째 직선을 추가하면, 새 직선은 n개의 조각으로 잘리고, 새 직선과 만나는 기존 직선 $n-1$개는 각각 선분 하나가 둘로 나뉘어 선분이 하나씩 늘어난다. 따라서

$$S(n) = S(n-1) + n + (n-1) = S(n-1) + 2n - 1,$$

이고, $S(1) = 1$이므로 $S(n-1) = (n-1)^2$이면 $S(n) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$이다.

영역의 개수

일반 위치에 있는 n개의 직선이 만드는 영역의 개수를 $R(n)$이라 하면 $R(1) = 2$이다. 그러한 직선 $n-1$개에서 시작하여 n번째 직선 ℓ을 추가한다. 앞에서와 같이 ℓ은 기존 직선들과 서로 다른 $n-1$개의 점에서 만나고 n개의 조각으로 잘린다.

이 조각 중 하나를 택하자. 그 내부는 어떤 기존 직선과도 만나지 않으므로 기존 영역 하나 안에 놓이고, 그 영역을 경계에서 경계까지(또는 무한히 먼 곳까지) 완전히 가로지른다. 따라서 그 영역을 둘로 나눈다.

> **생각해 보기** n개의 조각 중 두 개가 같은 기존 영역 안에 놓여서, 새로 생기는 영역이 n개보다 적어질 수 있을까?

그렇지 않다. 각 영역은 반평면(half-plane)들(각 기존 직선에 대해 정해진 한쪽)의 교집합이므로 볼록(convex)하다. 직선과 볼록 집합의 교집합은 하나의 구간이므로 ℓ은 각 기존 영역을 많아야 한 번 지나가고, 서로 다른 조각은 서로 다른 영역에 놓인다. 또한 ℓ이 지나가지 않는 영역은 그대로 남는다.

그러므로 ℓ을 추가하면 기존 영역 중 정확히 n개가 각각 둘로 나뉘고 나머지는 그대로이다.

$$R(n) = R(n-1) + n.$$

이제 수학적 귀납법을 쓴다. 식 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$은 $n = 1$일 때 2이므로 옳다. $R(n-1) = \frac{1}{2}\big((n-1)^2+(n-1)+2\big) = \frac{1}{2}(n^2-n+2)$이면

$$R(n) = \tfrac{1}{2}(n^2-n+2) + n = \tfrac{1}{2}(n^2+n+2),$$

이므로, 요구한 대로 이 식은 모든 $n \geq 1$에 대해 성립한다. (같은 말로, $R(n) = 1 + (1+2+\cdots+n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$이고, 맨 앞의 1은 직선이 하나도 없을 때의 평면 전체이다.)

검산

- 이 식은 $n = 1, 2, 3, 4$일 때 $2, 4, 7, 11$을 주어 그림과 일치한다.
- 오일러(Euler) 공식(Euler's formula)으로 독립적인 검산을 할 수 있다. 무한히 뻗는 반직선들을 하나의 "무한원점"에서 모이게 한다. 그러면 꼭짓점은 $V = \binom{n}{2} + 1$개, 변은 $E = n^2$개, 면은 F개이고 $V - E + F = 2$이므로 $F = n^2 - \binom{n}{2} + 1 = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$이다.
- 컴퓨터로 정수 계수를 갖는 직선을 최대 8개까지 무작위로 그리고, 교점의 위치를 구해 선분을 세었으며, 모든 교점 주변과 멀리 떨어진 곳의 표본점들에서 나타나는 "각 직선의 어느 쪽인가"의 서로 다른 패턴의 개수로 영역을 세었다. 예를 들어 직선 8개는 매번 선분 64개와 영역 37개를 주었다.

흔한 실수

- 각 직선 위의 무한한 반직선 두 개를 빠뜨려서 n^2 대신 $n(n-2)$를 얻는 것.
- 새 직선이 늘리는 영역이 n개(조각마다 하나)가 아니라 $n-1$개(교점마다 하나)라고 하는 것.

- 가정을 사용하지 않는 것: "어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 않는다"는 조건이 없으면 한 직선 위의 교점들이 서로 다르지 않을 수 있고, 개수가 줄어든다.

STEP 너머

이것은 **초평면 배치**(*hyperplane arrangement*)의 가장 단순한 경우이다. 같은 논증을 한 차원 높여 적용하면, 일반 위치에 있는 평면 n개는 공간을 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$개의 조각으로 나눈다는 것을 보일 수 있다. 새 평면 하나가 기존 평면들에 의해 그 자체로 $R(n-1)$개의 영역으로 잘리기 때문이다. 오일러 공식을 이용한 검산은 위상수학(topology)의 핵심 개념인 오일러 지표(Euler characteristic)를 처음 엿보는 것이다. 오일러 공식과 그 쓰임새를 다룬 멋진 장을 보려면 Aigner와 Ziegler의 *Proofs from THE BOOK*(『하늘책의 증명』)을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.