풀이

# STEP II 1990, 문제 3

순수수학 • 삼차함수의 그래프 그리기

> **STEP II 1990, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q3

## 핵심 아이디어

삼차함수(cubic)를 $f(x) = x(x^2 - 2bx + c^2)$로 쓴다. 두 판별식(discriminant)이 모든 것을 결정한다. $f'(x)$의 판별식은 극점(turning point)이 있는지를 알려 주고, 이차 인수의 판별식은 곡선이 원점이 아닌 다른 곳에서 $x$축과 만나는지를 알려 준다. 일곱 가지 경우는 두 경계값 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$와 $c$에 대하여 $b$를 어디에 놓느냐에 따른 경우일 뿐이다. 삼차함수의 그래프를 그리고 나면 $y^2 = f(x)$는 거의 저절로 얻어진다. $f(x) \geq 0$인 부분만 남기고, 제곱근을 취한 뒤 $x$축에 대하여 대칭이동하면 된다.

## 풀이

### 모든 경우에 성립하는 사실

$f(x) = x^3 - 2bx^2 + c^2x = x(x^2 - 2bx + c^2)$라 하자. 그러면

$$f'(x) = 3x^2 - 4bx + c^2, \qquad f''(x) = 6x - 4b.$$

이다.

- **극점.** $f'$의 판별식은 $16b^2 - 12c^2 = 4(4b^2 - 3c^2)$이다. 따라서 $2b > c\sqrt{3}$이면 $f'$은 서로 다른 두 실근을 갖고, $2b = c\sqrt{3}$이면 중근 하나를 가지며, $2b < c\sqrt{3}$이면 실근을 갖지 않는다. 근이 있을 때 두 근의 합은 $\frac{4}{3}b \geq 0$이고 곱은 $\frac{1}{3}c^2 \geq 0$이므로 어느 근도 음수가 아니다. 즉 모든 극점은 $x \geq 0$인 영역에 있다.
- **근.** 항상 $f(0) = 0$이다. 이차 인수는 $(x-b)^2 + c^2 - b^2$이므로, $b < c$이면 실근이 없고, $b = c$이면 중근(double root) $x = b$를 가지며, $b > c$이면 두 근 $b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$를 갖는다.
- **음수인 $x$.** $x < 0$이면 $x^3$, $-2bx^2$, $c^2x$가 모두 $\leq 0$이고 $x^3 < 0$이므로 $f(x) < 0$이다. $y$축

왼쪽에 있는 곡선 전체가 $x$축 아래에 놓인다.

- **모양**. $x \to \pm\infty$일 때 $f(x) \to \pm\infty$이다. 원점에서의 기울기(gradient)는 $f'(0) = c^2$이다. 또 변곡점(point of inflection)은 $f''$의 부호가 바뀌는 $x = \frac{2}{3}b$에 있는 것 하나뿐이다.

$c > 0$이면 항상 $c\sqrt{3} < 2c$이므로, $c$를 고정하면 각 경우는 $b$가 커지는 순서대로 나열된다. 극점이 없는 경우, 기울기가 0인 변곡점(stationary point of inflection)이 있는 경우, 극점이 축 위에 있는 경우, 축에 접하는 근이 있는 경우, 세 근을 갖는 경우의 순서이다.

### 삼차함수의 그래프

**(i)** $2b < c\sqrt{3}$. 이때 모든 $x$에 대하여 $f'(x) > 0$이므로(판별식이 음수이고 최고차항의 계수가 양수이다) $f$는 순증가한다. 또한 $b < \frac{\sqrt{3}}{2}c < c$이므로(여기서 $c > 0$임에 주의하라) 근은 원점뿐이다. 곡선은 기울기 $c^2$로 원점을 지나며 올라가고, $x = \frac{2}{3}b$에서 변곡점을 갖는다.

**(ii)** $2b = c\sqrt{3} \neq 0$. 이제 $f'(x) = 3(x - \frac{2}{3}b)^2 \geq 0$이므로 $f$는 여전히 증가하지만, $x = \frac{2}{3}b = c/\sqrt{3}$에서 순간적으로 기울기가 0이 된다. 이 점에서 $f'' = 0$이기도 하므로, 이 점은 기울기가 0인 변곡점이다. $c^2 = \frac{4}{3}b^2$를 이용하면

$$f\left(\tfrac{2}{3}b\right) = \tfrac{2}{3}b\left(\tfrac{4}{9}b^2 - \tfrac{4}{3}b^2 + \tfrac{4}{3}b^2\right) = \tfrac{8}{27}b^3 = \tfrac{\sqrt{3}}{9}c^3 > 0.$$

이다. 이번에도 $b < c$이므로 근은 원점뿐이다.

**(iii)** $c\sqrt{3} < 2b < 2c$. 이제 $f'$은 두 근 $x_1 < x_2$를 가지며 둘 다 양수이다. 따라서 $x_1 = \frac{1}{3}\left(2b - \sqrt{4b^2 - 3c^2}\right)$에서 극대, $x_2 = \frac{1}{3}\left(2b + \sqrt{4b^2 - 3c^2}\right)$에서 극소가 된다.

> **?** **생각해 보기** 극소점이 $x$축 아래로 내려가는가?

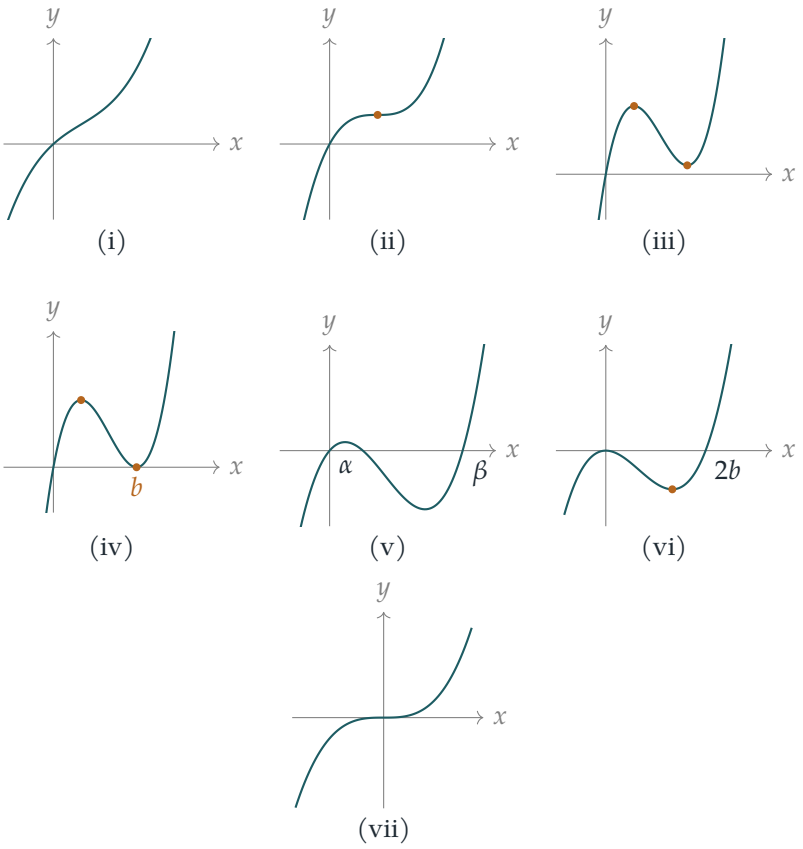
그렇지 않다. $b < c$이므로 인수 $(x - b)^2 + c^2 - b^2$는 모든 $x$에 대하여 양수이고, 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) > 0$이다. 그러므로 두 극점은 모두 축 위에 있고, 곡선은 여전히 원점에서만 축과 만난다. 곡선은 올라가다가 조금 내려온 뒤 다시 계속 올라간다.

**(iv)** $b = c \neq 0$. 이제 $f(x) = x(x - b)^2$이다. $x = b$가 중근이므로 곡선은 그 점에서 축에 접하며, 이 점 $(b, 0)$이 극소점이다. $f'(x) = (x - b)(3x - b)$의 나머지 근에서 극대점 $\left(\frac{1}{3}b, \frac{4}{27}b^3\right)$를 얻는다.

**(v)** $b > c > 0$. 세 근 $0 < \alpha < \beta$가 있으며, $\alpha = b - \sqrt{b^2 - c^2}$, $\beta = b + \sqrt{b^2 - c^2}$이다($\sqrt{b^2 - c^2} < b$이므로 둘 다 양수이다). 이웃한 두 근 사이에서 곡선은 방향을 바꾸어야 하므로, 극대점은 $(0, \alpha)$에 있고 그곳에서 $f > 0$이며, 극소점은 $(\alpha, \beta)$에 있고 그곳에서 $f < 0$이다. 따라서 $f \geq 0$인 범위는 정확히 $[0, \alpha]$와 $[\beta, \infty)$이다.

**(vi)** $c = 0, b \neq 0$. 이제 $f(x) = x^2(x - 2b)$이고 $f'(x) = x(3x - 4b)$이다. 원점이 중근이므로 원점은 곡선이 축에 접하는 극대점이 되고, $\left(\frac{4}{3}b, -\frac{32}{27}b^3\right)$에 극소점이 있다. 곡선은 $x = 2b$에서 축을 가로지른다.

**(vii)** $b = c = 0$. 이것은 $y = x^3$이며, 원점에 기울기가 0인 변곡점이 있다.




그림은 (i)–(iv)에서 $c = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0.99, 1을, (v)에서 $(b, c) = (1, 0.8)$을, (vi)에서 $b = 0.6$을 사용하였다. (iii)과 (iv)의 작은 굴곡이 보이도록 그림마다 세로 축척을 다르게 하였다.

**곡선 $y^2 = f(x)$**

다음 세 규칙으로 각 삼차함수의 그래프를 곡선 $y^2 = f(x)$로 바꾼다.

- $f(x) < 0$인 곳에는 점이 없으며, 특히 $x < 0$인 점은 없다.
- $f(x) \geq 0$인 곳에서는 $y = \pm\sqrt{f(x)}$이므로, 곡선은 $x$축에 대하여 대칭이고 $f$가 가장 큰 곳에서 가장 높다.
- 미분하면 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$이다.

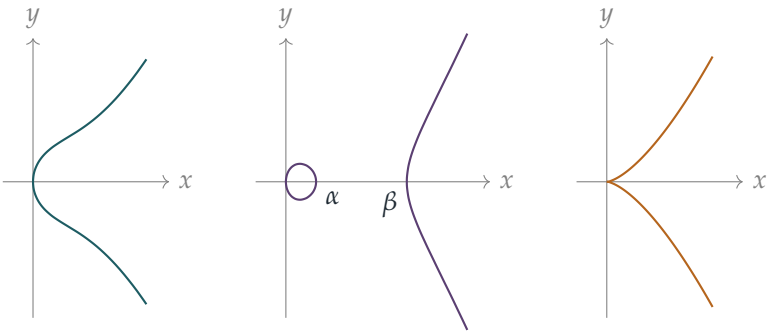
? **생각해 보기** 곡선이 $x$축과 만나는 곳에서 곡선은 어떤 모양인가?

$f$의 단순근(simple root) $x_0$에서는 $f'(x_0) \neq 0$이고, $y \to 0$일 때 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{2y}{f'(x)} \to 0$이다. 따라서 그곳에서 접선(tangent)은 **수직**이고, 위쪽 절반과 아래쪽 절반이 매끄럽게 이어진다. 이러한 근 근처에서는 $y^2 \approx f'(x_0)(x - x_0)$이며, 이는 옆으로 누운 포물선이다. 경우 (vii)에서 보듯이 중근에서는 다르게 행동한다.

**경우 (i).** $f(x) \geq 0$인 것은 정확히 $x \geq 0$일 때이고, 근 0은 단순근이다($f'(0) = c^2 > 0$). 따라서 곡선은 유계가 아닌 가지(branch) 하나로 이루어진다. 곡선은 수직 접선을 가지며 원점에서 출발하고, 그 근처에서 $y^2 \approx c^2 x$와 비슷하다. $f$가 증가하므로 $|y| = \sqrt{f(x)}$는 꾸준히 증가하며, 결국 $x^{3/2}$처럼 커진다. 위쪽 절반은 처음에는 $\sqrt{x}$처럼 위로 볼록하다가 나중에는 $x^{3/2}$처럼 아래로 볼록해지므로 변곡점을 하나 가진다(대칭에 의하여 아래쪽 절반도 마찬가지이다).

**경우 (v).** $[0, \alpha]$와 $[\beta, \infty)$에서 $f(x) \geq 0$이고, 세 근이 모두 단순근이다. 따라서 곡선은 서로 떨어진 두 조각으로 이루어진다. 하나는 $(0,0)$과 $(\alpha,0)$을 지나는 닫힌 고리(oval)로, 두 점 모두에서 수직 접선을 가지며 삼차함수의 극대점의 $x$좌표에서 ($y$ 방향으로) 가장 넓다. 다른 하나는 $(\beta,0)$에서 수직 접선을 가지며 출발하여 경우 (i)의 곡선처럼 오른쪽으로 열리는, 유계가 아닌 가지이다. 삼차함수가 음수인 틈 $\alpha < x < \beta$에는 아무것도 없다.

**경우 (vii).** $y^2 = x^3$이므로 $x \geq 0$이고 $y = \pm x^{3/2}$이다. 여기서 $x \to 0$일 때 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm\frac{3}{2}x^{1/2} \to 0$이다. 즉 두 절반이 모두 위와 아래에서 **$x$축에 접하면서** 원점에 도달하여, 첨점(cusp)이라 불리는 뾰족한 점을 이룬다.




(i) (v) (vii)

이 그림들은 대응하는 삼차함수와 같은 $b$, $c$ 값을 사용하였으며, 두 축의 축척은 같다.

## 검산

- 일반적인 결과에 $b = c = 0$을 대입하면 (vii)과 일치해야 한다. 예를 들어 (ii)의 정류값 $\frac{8}{27}b^3$과 (vi)의 극솟값 $-\frac{32}{27}b^3$은 모두 원점으로 줄어든다.
- $c = 1, b = 0.99$(경우 (iii))일 때 극점은 대략 $(0.340, 0.150)$과 $(0.980, 0.020)$이며, 주장한

대로 둘 다 축 위에 있다. $(b,c)=(1,0.8)$일 때 근은 $0, 0.4, 1.6$이고, 극솟값은 $x\approx 1.147$에서 약 $-0.388$로 $(0.4,1.6)$ 안에 있다.

- 경우 (i), (iii), (v)에서 무작위로 고른 수천 개의 $(b,c)$에 대한 수치 실험으로 극점과 근의 개수 및 위치, 그리고 $f\geq 0$인 집합을 확인하였다.

## 흔한 실수

- 경우 (iii)에서 극소점을 축 아래에 그리는 것. $b<c$이면 삼차함수는 모든 $x>0$에 대하여 양수이다.
- $y^2=f(x)$가 단순근에서 $x$축을 가로지르는 곳을 모서리나 수평 접선으로 그리는 것. 그 곳에서의 접선은 수직이다.
- 삼차함수가 음수인 곳에서는 $y^2=f(x)$의 점이 없다는 것을 잊는 것. 그래서 경우 (v)에서 닫힌 고리와 가지는 서로 떨어져 있다.

## STEP 너머

삼차식이 서로 다른 근을 갖는 곡선 $y^2=x^3+Ax^2+Bx+C$를 **타원곡선**(elliptic curve)이라 하며, 이는 현대 정수론(number theory)의 핵심 대상 중 하나이다. 세 실근을 갖는 경우 (v)는 닫힌 고리와 가지로 이루어진 두 조각의 그림을 주고, 실근이 하나인 경우 (i)은 한 조각을 준다. 근이 겹치면 곡선은 특이(singular)해진다. 경우 (vii)은 첨점을 가지며, 경우 (iv)는 $(b,0)$에서 자기 자신과 교차하는 곡선을 준다. 이러한 곡선 위의 점들을 "더하는" 놀라운 방법에 대한 입문으로는 Silverman과 Tate의 *Rational Points on Elliptic Curves*(타원곡선 위의 유리점)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.