풀이

STEP II 1990, 문제 2

순수수학 • 프톨레마이오스 정리

> **STEP II 1990, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q2

핵심 아이디어

첫 번째 부분은 사인의 곱을 모두 코사인의 차로 바꾸고 나면 저절로 풀리는 삼각항등식(trigonometric identity)이다. 그다음 조건 $A+B+C+D=\pi$를 이용해 $\cos(A+C)$와 $\cos(A-C)$를 다시 쓴다. 두 번째 부분은 프톨레마이오스의 정리(Ptolemy's theorem)이다. 중심 O가 힌트이다. 반지름이 r인 원의 모든 현(chord)은 길이가 $2r\sin$(현이 이루는 중심각의 절반, 중심O)이고, O 둘레의 네 반각을 더하면 π가 되는데, 이것이 바로 첫 번째 부분의 조건이다.

풀이

항등식

곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)

$$\sin X \sin Y = \tfrac{1}{2}[\cos(X-Y) - \cos(X+Y)]$$

을 세 번 사용한다. 좌변에서

$$\sin(A+B)\sin(A+D) = \tfrac{1}{2}[\cos(B-D) - \cos(2A+B+D)],$$
$$\sin B \sin D = \tfrac{1}{2}[\cos(B-D) - \cos(B+D)],$$

이므로 $\cos(B-D)$ 항이 소거되어

$$\sin(A+B)\sin(A+D) - \sin B \sin D = \tfrac{1}{2}[\cos(B+D) - \cos(2A+B+D)].$$

이다. 우변에서는

$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}[\cos(A-C) - \cos(A+C)].$$

이다. 이제 $C = \pi - A - B - D$를 이용한다. 그러면

$$A + C = \pi - (B + D), \qquad \text{따라서} \quad \cos(A + C) = -\cos(B + D),$$
$$A - C = (2A + B + D) - \pi, \qquad \text{따라서} \quad \cos(A - C) = -\cos(2A + B + D),$$

이다. 여기서 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$와 $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$를 사용했다. 그러므로

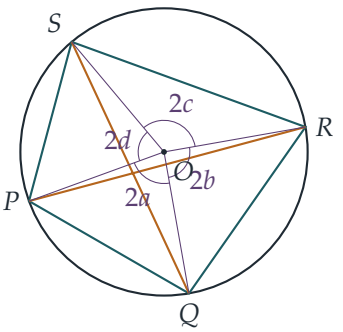
$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}[-\cos(2A + B + D) + \cos(B + D)],$$

이고, 이는 좌변과 같다. 이로써 항등식이 증명된다.

원

원의 반지름을 r라 하자. 원을 따라 P에서 Q, R, S를 거쳐 다시 P로 돌아올 때, 호 PQ, QR, RS, SP가 O에서 이루는 중심각을 각각 $2a$, $2b$, $2c$, $2d$라 하자. 점들이 이 순서로 놓여 있으므로 네 호는 서로 겹치지 않고 원 전체를 이룬다. 따라서

$$a, b, c, d > 0, \qquad 2a + 2b + 2c + 2d = 2\pi, \qquad \text{즉} \quad a + b + c + d = \pi.$$



생각해 보기 호가 중심에서 이루는 각이 2θ인 현의 길이는 얼마인가?

$0 < 2\theta \le \pi$이면, O와 현의 두 끝점이 이루는 삼각형은 두 변의 길이가 r이고 꼭지각이 2θ인 이등변삼각형(isosceles triangle)이다. O에서 내린 수선은 현과 꼭지각을 모두 이등분하므로 현의 길이는 $2r\sin\theta$이다. 반면 $\pi < 2\theta < 2\pi$이면 삼각형 안에서 O의 각은 $2\pi - 2\theta$이고, 현의 길이는 $2r\sin(\pi - \theta) = 2r\sin\theta$이다. 따라서 어느 경우에나

$$\text{현의 길이} = 2r\sin\theta.$$

이를 네 변과 두 대각선(호 $P \to Q \to R$는 $2(a + b)$, 호 $Q \to R \to S$는 $2(b + c)$의 중심각을 이룬다)에 적용하면

$$PQ = 2r\sin a, \quad QR = 2r\sin b, \quad RS = 2r\sin c, \quad PS = 2r\sin d,$$

$$PR = 2r\sin(a+b), \qquad QS = 2r\sin(b+c).$$

을 얻는다. $a+b$나 $b+c$가 $\frac{\pi}{2}$보다 클 수 있다는 점에 주의하자. 반원보다 큰 호에 대한 공식이 필요했던 이유가 이것이다.

$4r^2$으로 나누면, 증명하려는 결과는

$$\sin a \sin c + \sin b \sin d = \sin(a+b)\sin(b+c),$$

또는 이와 동치인

$$\sin(b+a)\sin(b+c) - \sin a \sin c = \sin b \sin d.$$

가 된다. 이는 $A=b, B=a, D=c, C=d$로 둔 첫 번째 부분의 항등식과 정확히 같으며, $b+a+d+c=\pi$이므로 그렇게 둘 수 있다. 다시 $4r^2$을 곱하면

$$PQ \times RS + QR \times PS = PR \times QS,$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

- 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 원에 내접하는 정사각형은 변의 길이가 1, 대각선의 길이가 $\sqrt{2}$이다: $1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$.
- 변의 길이가 p, q인 임의의 직사각형에서 프톨레마이오스의 정리는 $p^2+q^2 =$ (대각선)^{2}이 된다. 즉 피타고라스(Pythagoras)의 정리는 그 특수한 경우이다. 3×4 직사각형에서는 $9+16=25=5\times 5$이다.
- A, B, D에 무작위 값 10^5개를 넣고($C=\pi-A-B-D$로 두고) 항등식을 수치적으로 확인했더니 최대 오차가 약 5×10^{-15}였고, 무작위로 만든 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral) 10^5개가 상대 오차 10^{-15} 이내에서 최종 결과를 만족했다. 점들의 순서를 바꾸면(예를 들어 원을 따라 P, R, Q, S 순서로 놓으면) 등식이 성립하지 않으므로, 순서가 정말로 중요하다.

흔한 실수

- 원 위의 한 점에서의 원주각(inscribed angle)을 쓰면서 그 각이 어느 호에 대한 것인지 밝히지 않는 것. 문제에서 권하는 대로 중심각을 사용하면 이 문제를 피할 수 있다.
- 대각선이 반원보다 큰 호를 잘라낼 수 있다는 사실을 잊는 것. 공식 $2r\sin\theta$는 여전히 성립하지만, 위에서 한 줄로 보인 정당화가 필요하다.
- A, B, C, D에 엉뚱한 각을 대응시키는 것. A와 C는 우변에만 나타나는 두 각, 여기서는 b와 d여야 한다.

STEP 너머

프톨레마이오스의 정리에는 훨씬 더 멀리 나아가는 후속 결과가 있다. 평면 위의 임의의 네 점에 대해 $PQ \cdot RS + QR \cdot PS \geq PR \cdot QS$가 성립하고, 등호는 네 점이 원(또는 직선) 위에 순서대로 놓일 때에만 성립한다. 깔끔한 증명은 점들을 복소수 p, q, r, s로 보고, 대수적 항등식 $(p-q)(r-s) + (q-r)(p-s) = (p-r)(q-s)$에 주목한 다음 삼각부등식(triangle inequality)을 적용하는 것이다. 등호가 성립하는 경우에서 복소평면의 기하가 등장한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이런 종류의 논증과, 이 결과를 깔끔하게 증명하는 또 다른 방법인 반전(inversion)을 만나기에 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.