풀이

STEP II 1990, 문제 14

역학 • 탄성 충돌

STEP II 1990, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s2-q14

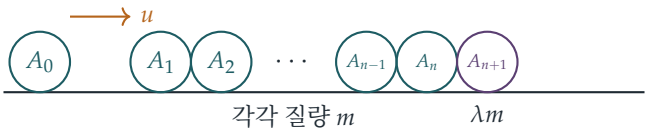
이 문제는 *Beyond STEP*의 10.1 절 **뉴턴의 요람**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/newtons-cradle.html

핵심 아이디어

충격량이 줄을 따라 어떻게 전달되는지 모르므로 충돌을 하나하나 추적할 수는 없다. 대신 제안된 각 최종 운동을 세 가지 조건으로 검사할 수 있다. 운동량(momentum)이 보존되고, 운동 에너지(kinetic energy)가 보존되며, 구슬들이 서로를 통과하지 않는다는 것이다. 세 번째 조건은 잊기 쉽지만 각 소문항의 답을 결정하는 것은 바로 이 조건이다. 바로 뒤에 정지한 구슬이 있는 구슬은 뒤로 움직일 수 없고, 어떤 구슬도 바로 앞에 있는 구슬보다 빠르게 움직일 수 없다.

풀이

구슬들을 매끄러운 직선(홈통) 위의 입자로 모형화하고, 속도는 A_0의 처음 운동 방향을 양의 방향으로 하여 잰다. 충돌 전 전체 운동량은 mu이고 전체 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mu^2$이며, 둘 다 보존된다.



구슬들이 겹칠 수 없으므로, 가능한 모든 최종 운동에 대해 다음 두 가지 사실이 성립한다.

- A_k가 정지해 있고 A_{k+1}이 그 바로 앞에서 맞닿아 있으면, A_{k+1}의 속도는 음수일 수 없다.
- A_k와 A_{k+1}이 맞닿아 있으면, A_k의 속도는 A_{k+1}의 속도보다 클 수 없다.

소문항 (i)

A_n과 A_{n+1}만 각각 속도 v와 w로 움직인다고 하자. 양변을 m으로 나누면

$$v + \lambda w = u,$$
$$v^2 + \lambda w^2 = u^2.$$

$v = u - \lambda w$를 에너지 방정식에 대입하면

$$u^2 - 2\lambda uw + \lambda^2 w^2 + \lambda w^2 = u^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda w\big((1+\lambda)w - 2u\big) = 0.$$

근 $w = 0$에서는 $v = u$이다. 그러면 A_n이 정지한 A_{n+1} 쪽으로 앞으로 움직이게 되므로 불가능하다. 다른 근은

$$w = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad v = u - \lambda w = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda}.$$

$\lambda < 1$인 경우: $v > 0$이므로 A_n은 정지한 A_{n-1}에서 멀어진다. 또한

$$w - v = \frac{(1+\lambda)u}{1+\lambda} = u > 0,$$

이므로 A_{n+1}은 A_n에서 멀어진다. 두 보존 법칙이 모두 성립하고 겹치는 것도 없으므로, $A_0, \ldots, A_{n-1}$이 모두 정지한 이 운동은 가능하다.

$\lambda > 1$인 경우: $v < 0$이므로 A_n은 뒤로 움직여야 한다. 그런데 A_{n-1}이 바로 뒤에서 맞닿은 채 정지해 있다. 따라서 두 보존 법칙을 모두 만족하는 유일한 운동이 물리적으로 불가능하므로, $\lambda > 1$일 때 이런 종류의 운동은 존재하지 않는다.

소문항 (ii)

A_{n-1}, A_n, A_{n+1}만 각각 속도 a, b, c로 움직인다고 하자. $n \geq 3$이므로 구슬 A_{n-2}가 존재하고, 이 구슬은 정지한 채 뒤에서 A_{n-1}과 맞닿아 있다. 따라서 $a \geq 0$이다. 움직이는 세 구슬은 서로 추월할 수 없으므로 $a \leq b \leq c$이다. 그러므로 a, b, c는 모두 음이 아니다.

생각해 보기 두 보존 법칙은 모두 a, b, c에 관한 방정식을 준다. 풀지 않고 이 둘을 어떻게 비교할 수 있을까?

운동량 방정식을 제곱한 뒤 에너지 방정식을 뺀다. 보존 법칙에서 $a + b + \lambda c = u$이고 $a^2 + b^2 + \lambda c^2 = u^2$이므로

$$(a + b + \lambda c)^2 - (a^2 + b^2 + \lambda c^2) = u^2 - u^2 = 0.$$

좌변을 전개하면

$$\lambda(\lambda-1)c^2+2ab+2\lambda c(a+b)=0.$$

$\lambda>1$이고 $a,b,c\geq 0$이면 좌변의 모든 항이 음이 아니므로, 모든 항이 0이어야 한다. 특히 $\lambda(\lambda-1)c^2=0$이므로 $c=0$이다. 그러면 $0\leq a\leq b\leq c=0$이므로 세 구슬이 모두 정지해 있다. $u>0$이므로 이는 운동량 방정식에 모순이다. 따라서 $\lambda>1$일 때 이러한 운동은 존재하지 않는다.

소문항 (iii)

(ii)의 논증은 움직이는 구슬들의 어떤 집합에도 적용된다. 모든 속도가 음이 아니고 A_{n+1}이 움직이면 운동 에너지가 너무 작다. 따라서 $\lambda>1$일 때는 어떤 구슬이 뒤로 움직여야 한다. A_0을 제외한 모든 구슬은 바로 뒤에 구슬이 있으므로, 되튀는 구슬의 자연스러운 후보는 A_0이다.

? **생각해 보기** 어떤 두 구슬을 시도해 보아야 할까?

A_0과 A_{n+1}이 각각 속도 p와 q로 움직이고 $A_1,\ldots,A_n$은 정지해 있다고 해 보자. 이는 v,w 대신 p,q를 쓴 것만 다를 뿐 (i)과 같은 두 방정식이고, 자명하지 않은 해는

$$p=\frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda}=-\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1},\qquad q=\frac{2u}{1+\lambda}.$$

(i)에서와 같이 운동량과 에너지가 보존된다. 또한 이 운동은 물리적으로 가능하다.

- $p<0$이므로 A_0은 뒤로 움직여 A_1에서 멀어지고, A_0 뒤에는 아무것도 없다.
- $q>0$이므로 A_{n+1}은 정지한 A_n에서 멀어진다.

따라서 가능한 운동 하나는 A_0이 속력 $\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$로 되튀고, A_{n+1}이 속력 $\frac{2u}{\lambda+1}$로 움직여 나가며, $A_1,\ldots,A_n$은 정지해 있는 것이다.

충돌을 이웃한 구슬 사이의 개별 충돌이 차례로 일어나는 것으로 모형화해도 바로 이 결과가 나온다. 같은 구슬끼리의 각 쌍은 속도를 서로 맞바꾸므로, 속력 u가 A_n까지 전달된다. A_n이 A_{n+1}과 충돌하면 속도 p로 되튀고, 이 뒤쪽 방향 속도가 다시 줄을 따라 A_0까지 전달된다.

검산

- $\lambda=1$이면 모든 구슬이 똑같고, 두 답 모두 A_{n+1}이 속력 u로 움직여 나가고 나머지는 모두 정지하는 것이 된다. 이것이 익숙한 "뉴턴의 요람(Newton's cradle)"이다.
- $\lambda=2,u=3$이면 소문항 (iii)에서 $p=-1,q=2$이다. 운동량: $-1+2\times 2=3$. 에너지: $1+2\times 4=9=3^2$.

- $n = 3$과 $n = 6$에 대해 두 구슬 사이의 탄성 충돌(elastic collision)이 차례로 일어나는 과정을 수치적으로 단계별로 계산해 보았다. $\lambda = 2$일 때 최종 속도는 $-\frac{1}{3}u$와 $\frac{2}{3}u$였고, $\lambda = 4$일 때는 $-0.6u$와 $0.4u$로, 예측과 정확히 일치했다. $\lambda = \frac{1}{2}$일 때 시뮬레이션은 A_n과 A_{n+1}이 $\frac{1}{3}u$와 $\frac{4}{3}u$로 움직이며 끝나서 (i)과 일치한다.

흔한 실수

- 두 보존 방정식을 풀고 거기서 멈추는 것. 각 소문항의 답은 그 해가 물리적으로 가능한지, 즉 속도의 부호와 구슬들이 서로를 통과하게 되는지에 달려 있다.
- (i)에서 근 $w = 0, v = u$를 남겨 두는 것. 그 근은 충돌 전의 운동을 나타낼 뿐이다.
- (ii)에서 A_{n-1} 뒤에 정지한 A_{n-2}가 있음을 보장하는 것이 $n \geq 3$이라는 조건임을 잊는 것.

STEP 너머

맞닿아 있는 구슬들의 줄에서는 두 보존 법칙만으로는 결과가 정해지지 않는다. 이 문제는 사실 보존량을 만족하는 수많은 해 가운데 어느 것이 물리적으로 가능한지에 관한 것이다. 이들 가운데 하나를 고르려면 두 구슬 사이의 충돌이 차례로 일어난다고 보거나 구슬들을 단단한 용수철로 다루는 등, 접촉에 대한 더 자세한 모형이 필요하다. 구슬들을 용수철로 모형화하면 입자 사슬에서의 파동 이론으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 충돌과 보존 법칙을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.