풀이

STEP II 1990, 문제 13

역학 • 막대의 평형

> **STEP II 1990, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q13

핵심 아이디어

못(peg)이 매끄럽고 줄이 가벼우므로 장력(tension)은 줄 전체에서 같고, 따라서 막대는 PO 방향과 QO 방향으로 크기가 **같은** 두 힘을 받는다. 이 두 힘의 합력(resultant)은 각 POQ를 이등분하며, 평형(equilibrium)을 이루려면 합력이 같은 연직선 위에서 무게와 균형을 이루어야 한다. 그러므로 O를 지나는 연직선은 POQ의 각의 이등분선이고 G를 지나며, 나머지는 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)가 해결해 준다. 그러면 구하는 부등식은 삼각형 OPQ가 진짜 삼각형이라는 사실을 말할 뿐이다.

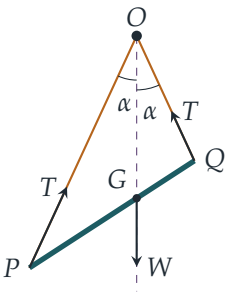
풀이

OP와 OQ 구하기

막대를 무게중심(centre of gravity)이 G인 강체 막대로 모형화하고, $PG = a + d$, $GQ = a - d$라 하자. $0 \leq d < a$로 잡으면 G는 막대 위에 있으며 중점에 대하여 Q 쪽에 있다(또는 중점과 일치한다). 줄은 가볍고 늘어나지 않으며 못은 작고 매끄러우므로, 장력 T는 두 부분 OP와 OQ에서 같고

$$OP + OQ = 2b.$$

막대에 작용하는 힘은 세 개뿐이다. G에 작용하는 무게 W, P에서 PO 방향으로 작용하는 장력 T, 그리고 Q에서 QO 방향으로 작용하는 장력 T이다.



두 장력의 작용선은 O에서 만나므로 (O에 대한 모멘트(moment)를 생각하면) 무게도 O를 지나며 작용해야 한다. 즉 O를 지나는 연직선은 G를 지난다. 또한 두 장력의 크기가 같으므로, 그 합력은 PO 방향 단위벡터와 QO 방향 단위벡터의 합의 방향, 곧 두 힘 사이의 각의 이등분선 방향을 향한다. 이 합력이 W와 균형을 이루려면 연직이어야 한다. 따라서 연직선 OG는 각 POQ를 이등분한다. 이등분된 각을 각각 α라 하자.

생각해 보기 OG가 각 POQ를 이등분한다는 사실로부터 길이에 대해 무엇을 알 수 있는가?

삼각형 OPQ에서 각의 이등분선 정리에 의해, O에서 그은 이등분선은 PQ를 이웃한 두 변의 비로 나눈다.

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{PG}{GQ} = \frac{a+d}{a-d}.$$

(직접 확인해 보자. 삼각형 OPG와 OQG는 O에서 내린 높이를 공유하므로 넓이의 비는 $PG : GQ$이다. 한편 두 삼각형의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}\,OP \cdot OG \sin\alpha$와 $\frac{1}{2}\,OQ \cdot OG \sin\alpha$이기도 하다.) 따라서 어떤 $k > 0$에 대하여 $OP = k(a+d)$, $OQ = k(a-d)$이고, $OP + OQ = 2b$에서 $2ka = 2b$, 즉 $k = b/a$이다.

$$OP = \frac{b(a+d)}{a}, \qquad OQ = \frac{b(a-d)}{a}.$$

부등식

$\theta = \angle POQ = 2\alpha$라 하자. 막대가 연직이 아니므로 O는 직선 PQ 위에 있지 않고, 따라서 OPQ는 진짜 삼각형이며 $0 < \theta < \pi$이다. $PQ = 2a$로 코사인 법칙(cosine rule)을 쓰면

$$\begin{aligned} 4a^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2\,OP \cdot OQ \cos\theta \\ &= \frac{b^2}{a^2}\Big[(a+d)^2 + (a-d)^2 - 2(a^2-d^2)\cos\theta\Big] \\ &= \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\cos\theta\Big]. \end{aligned}$$

이제 $\theta \neq 0$이므로 $\cos\theta < 1$이고, $d < a$이므로 $a^2 - d^2 > 0$이다. 따라서

$$4a^2 > \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\Big] = \frac{4b^2d^2}{a^2},$$

즉 $b^2d^2 < a^4$이다. ($b > 0, d \geq 0$이므로) 양의 제곱근을 취하면 $bd < a^2$이고, 따라서

$$d < \frac{a^2}{b},$$

이 되어 증명이 끝난다.

이것은 삼각형 부등식(triangle inequality) $OP - OQ < PQ$와 동치이다. 여기서 $OP - OQ = 2bd/a$이고, $2bd/a < 2a$는 같은 조건이다. (다른 쪽 부등식 $\cos\theta > -1$은 $OP + OQ > PQ$, 즉 $b > a$를 주는데, 이는 줄이 애초에 못에 걸칠 수 있을 만큼 길다는 뜻일 뿐이다.)

검산

- $d = 0$(균일한 막대)이면 $OP = OQ = b$이고, 대칭성에서 예상되듯이 막대는 수평으로 매달린다. 부등식 $0 < a^2/b$는 자동으로 성립한다.
- $d \to a^2/b$이면 $OP - OQ \to 2a = PQ$이므로 삼각형이 납작해지고 막대는 연직이 된다. 이 값을 넘어서면 연직으로 매달리는 방법밖에 없다.
- $a = 1, b = 2, d = 0.3$이면 $OP = 2.6, OQ = 1.4, \cos\theta \approx 0.648$이다. 이 삼각형을 OG가 연직이 되도록 놓으면, 두 장력의 수평 성분이 상쇄되고 O에 대한 모멘트가 기계 정밀도 수준에서 균형을 이룬다. 줄의 모든 위치를 조사해 본 결과, 이것이 연직이 아닌 유일한 평형이며 $d \geq a^2/b$이면 그러한 평형이 존재하지 않음을 확인하였다.

흔한 실수

- 줄의 두 부분에서 장력이 다르다고 가정하는 것. 매끄러운 못에 걸린 줄에서는 장력이 같으며, 바로 이 때문에 OG가 각의 이등분선이 된다.
- 각의 이등분선의 비를 거꾸로 쓰는 것. 더 긴 줄 OP는 G에서 더 먼 끝에 연결된다.
- 이 평형이 안정(stable)하리라고 기대하는 것. 사실 이 평형은 불안정하다. $d = 0$일 때 수평인 막대에서 G는 O보다 $\sqrt{b^2 - a^2}$만큼 아래에 있지만, 연직으로 매달리면 G는 b만큼 아래에 있어 더 낮다. 문제는 평형에 대해서만 묻고 있다.

STEP 너머

막대에 대한 O의 자취는 P와 Q를 초점(foci)으로 하는 타원(ellipse)이고, 평형 위치는 G의 높이가 정류값을 갖는 곳이다. 이것이 가상일의 원리(principle of virtual work)이며, 이는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 이어진다. 이 원리는 왜 크기가 같은 장력이 각을 이등분하는지도 설명해 준다. 그것은 바로 타원의 반사 성질(reflection property)이다.

Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 정역학(statics)과 안정성을 공부하기 위한 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.