풀이

STEP II 1990, 문제 12

역학 • 반발 계수와 포물체 운동

STEP II 1990, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

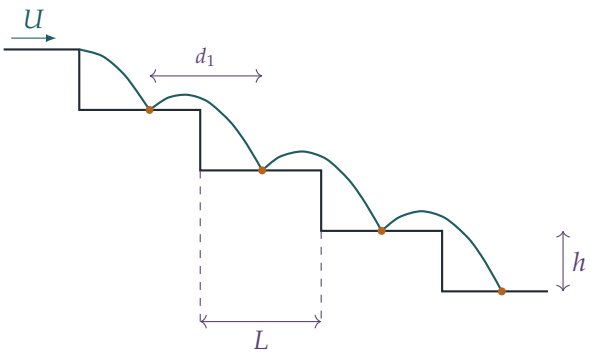
step.maths.org/questions/90-s2-q12

핵심 아이디어

계단이 매끄러우므로(smooth) 수평 속도는 결코 변하지 않는다. 수평 속도는 내내 U로 유지되고, 모든 수평 거리는 단순히 U에 비행 시간을 곱한 것이다. 모든 계산은 연직 운동에 있다. 연직 운동에서는 매번 튕길 때마다 연직 속력에 e가 곱해지고, 높이 h만큼 떨어질 때마다 그 제곱에 $2gh$가 더해진다. 이로부터 각 튕김에서의 연직 속력의 **제곱**에 대한 간단한 점화식(recurrence)을 얻는다. 마지막 부분에서는 튕김이 어디에 떨어져야 하는지 생각해 보라. 끝없이 이어지는 계단에서 계단 한 칸마다 한 번씩 떨어져야 한다.

풀이

입자는 튕김과 튕김 사이에 중력만 받으며 움직이는 점으로, 계단은 매끄러운 수평면으로 모형화한다. 각 계단은 바로 위 계단보다 높이 h만큼 낮고, 계단 모서리 사이의 수평 거리는 L이다.



튕김 사이의 거리

수평 운동. 계단이 매끄러우므로 계단이 가하는 충격량(impulse)은 모두 순수하게 연직 방향이고, 튕김과 튕김 사이에 작용하는 힘은 중력뿐이다. 따라서 수평 속도는 언제나 U이고, 시간 T 동안의 비행은 수평 거리 UT를 이동한다.

연직 운동. 입자가 n번째 튕김에서 계단에 부딪칠 때의 (아래 방향) 속력을 w_n이라 하자. 입자는 연직 속도 없이 맨 위 계단을 떠나 h만큼 떨어지므로

$$w_1^2 = 2gh.$$

n번째 튕김에서, 고정된 계단에 대한 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따라 입자는 속력 ew_n으로 위로 튀어 오른다. 그 뒤 입자는 h만큼 낮은 다음 계단에 도달해야 하므로, $v^2 = u^2 + 2as$에 의해 (아래 방향을 양으로 잡으면 변위는 $+h$이다)

$$w_{n+1}^2 = e^2 w_n^2 + 2gh.$$

$w_1^2 = 2gh$에서 시작하여 이 식을 거듭 적용하면

$$\begin{aligned} w_n^2 &= 2gh\left(1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)}\right) \\ &= 2gh\,\frac{1 - e^{2n}}{1 - e^2} = 2gh\,\alpha_n^2 \end{aligned}$$

이다. 여기서 등비급수(geometric series)의 합을 이용하였다($e^2 \neq 1$이므로 성립한다). 따라서 모든 $n \geq 1$에 대하여 $w_n = \sqrt{2gh}\,\alpha_n$이다. 간단한 수학적 귀납법(induction)으로 이를 엄밀하게 보일 수 있다. $e^2 \cdot 2gh\,\alpha_n^2 + 2gh = 2gh\left(e^2\alpha_n^2 + 1\right)$이고 $e^2\alpha_n^2 + 1 = \dfrac{e^2 - e^{2n+2} + 1 - e^2}{1 - e^2} = \alpha_{n+1}^2$이기 때문이다.

? **생각해 보기** n번째 튕김에서 $(n+1)$번째 튕김까지의 비행 시간은 얼마인가?

연직 속도는 (아래 방향으로) 일정한 비율 g로 변한다. 처음에는 위로 ew_n이고 끝에는 아래로 w_{n+1}이므로, 전체 변화량은 $ew_n + w_{n+1}$이고 비행 시간은

$$T_n = \frac{ew_n + w_{n+1}}{g} = \frac{\sqrt{2gh}}{g}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right) = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right)$$

이다. (이렇게 하면 T_n에 대한 이차방정식을 풀지 않아도 된다. 나중 속력을 이미 알고 있기 때문이다.) 수평 속력 U를 곱하면

$$d_n = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right)$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

아주 긴 계단

$0 \le e < 1$이므로 $e^{2n} \to 0$이고, 따라서 $n \to \infty$일 때 $\alpha_n \to \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}$이다. 그러므로 $1-e^2 = (1-e)(1+e)$를 이용하면

$$d_n \to D = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}}$$

이다.

? **생각해 보기** 이 극한(limit) 거리가 왜 정확히 L이어야 하는가?

맨 위 계단의 모서리에서부터 수평으로 x를 잰다. 바로 아래 첫 번째 계단은 $0 \le x \le L$을 차지하고, 일반적으로 맨 위에서 n번째 아래 계단은 $(n-1)L \le x \le nL$을 차지한다. 입자는 모든 계단에서 한 번씩 튕기므로, n번째 튕김의 위치를 x_n이라 하면

$$(n-1)L \le x_n \le nL, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{x_n}{n} \to L \text{ 이다. 여기서} n \to \infty.$$

한편 $x_n = x_1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}$이고 $d_k \to D$이다. 만약 $D > L$이면 어느 시점부터는 모든 d_k가 L보다 적어도 일정한 양만큼 크므로, 입자는 튕길 때마다 계단 모서리보다 일정한 거리만큼 앞서 나가다가 결국 어떤 계단을 건너뛰게 된다. 만약 $D < L$이면 입자는 꾸준히 뒤처지다가 결국 같은 계단에 두 번 떨어지게 된다. (엄밀하게는, D로 수렴하는 항들의 평균 x_n/n은 D로 수렴한다.) 어느 경우든 충분히 긴 계단에서는 계단 한 칸마다 한 번씩 튕길 수 없다. 따라서 N이 매우 클 때에는 $D = L$이어야 한다.

$$U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} = L \quad \Longrightarrow \quad U = \left(\frac{L^2 g}{2h}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}}$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

검산

- **특수한 값.** $\alpha_1 = 1$이므로 $d_1 = U\sqrt{2h/g}\,(e + \sqrt{1+e^2})$이다. $e = 0$이면 입자는 튕길 때마다 연직 방향으로 완전히 멈추므로, 각 비행은 $\sqrt{2h/g}$의 시간이 걸리는 단순한 h만큼의 낙하이다. 실제로 $d_n = U\sqrt{2h/g}$이고, 마지막 조건은 $U\sqrt{2h/g} = L$이 되어 정확히 예상대로이다.
- **차원**(*dimensions*). $\sqrt{2h/g}$는 시간이므로 d_n은 길이이다. $\sqrt{L^2 g/h}$는 속력이다.
- **수치 계산.** U, h, e에 무작위 값을 넣고 ($g = 9.8$로 두고) 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산해 보았더니, 각 d_n이 10^{-6} 이내의 오차로 재현되었다. $e = \frac{1}{2}$, $L = 0.3$, $h = 0.2$일 때 공식은 $U \approx 0.857$을 주며, 이때 튕김 위치는 2000개의 계단 동안 연속한 계단 위에 머물렀다.

흔한 실수

- 매번의 튕김을 정지 상태에서, 또는 직전 튕김의 높이에서 h만큼 떨어지는 것으로 보는 실수. 입자는 튕길 때마다 위로 솟아오르므로, 연직 속력은 계단을 거칠수록 커진다.
- $w_{n+1} = ew_n + \sqrt{2gh}$로 쓰는 실수. 더해지는 것은 속력 자체가 아니라 속력의 **제곱**이다.

STEP 너머

마지막 부분은 평균에 관한 명제이다. $d_n \to D$이면 누적 평균도 $\frac{1}{n}\sum d_k \to D$를 만족한다(체사로(Cesàro) 정리). 이는 실해석학(real analysis) 초반의 대표적인 연습문제이다. 또한 U에 대한 조건은 **필요조건**(necessary)일 뿐 충분조건(sufficient)이 아니라는 점에 주목하라. 초반의 튕김은 L보다 짧으며, e가 1에 가까우면 누적된 부족분이 처음의 앞선 거리 x_1을 넘어설 수 있어서, 어떤 발사 속력도 통하지 않는다. 수열의 극한을 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 충돌의 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문서)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.