풀이

STEP II 1990, 문제 11

역학 • 각운동량 보존

> **STEP II 1990, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q11

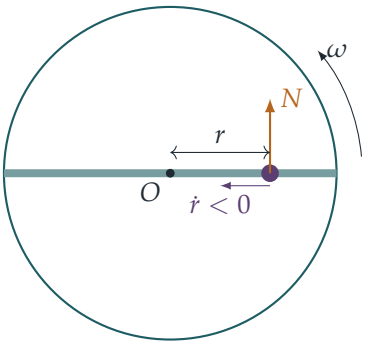
핵심 아이디어

원판과 입자를 하나의 계로 보면, 연직축에 대한 외부 토크(torque)가 없고 일을 하는 외력도 없으므로 두 가지 양이 보존된다. 바로 축에 대한 각운동량(angular momentum)과 운동 에너지(kinetic energy)이다. 이 두 식으로부터 ω와 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$를 곧바로 얻는다. 한 변화율을 다른 변화율로 나누면 시간이 소거되고, 경로, 즉 θ의 함수로서의 r에 대한 변수분리형 미분방정식(separable equation)이 남는다.

풀이

모형

입자를 매끄러운 홈 안에 있는 질점으로 보고, 축도 매끄럽다(마찰 없는 베어링)고 가정한다. 위에서 내려다보면, 홈을 따라 거리 r인 곳에 있는 입자는 홈 방향으로 속도 $\dot{r}$, 홈에 수직인 방향으로 속도 $r\omega$를 가진다. 여기서 $\omega = \dot{\theta}$이다.



입자에 작용하는 수평 방향의 힘은 홈에 수직인 홈의 반작용 N뿐이다(홈이 매끄러우므로 홈 방향 성분은 없다). 원판은 $-N$을 받는다.

각운동량

중력과 연직 방향의 반작용은 축과 평행하고, 매끄러운 축은 토크를 가하지 않으므로 축에 대한 전체 각운동량은 일정하다. 원판의 기여는 $mk^2\omega$이고 입자의 기여는 $m\,r\cdot r\omega = mr^2\omega$이다. $t=0$일 때와 비교하면

$$mk^2\omega + mr^2\omega = mk^2\Omega + ma^2\Omega \quad\Longrightarrow\quad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2}.$$

에너지

> **생각해 보기** 반작용 N은 입자가 옆으로 움직이는 동안 입자를 옆으로 민다. 그렇다면 운동 에너지가 변하지 않는가?

입자의 운동 에너지는 변하지만 전체 운동 에너지는 변하지 않는다. N은 입자에 $N\cdot r\omega$의 비율로 일을 하고, 원판에 작용하는 크기가 같고 방향이 반대인 힘은 같은 거리 r에서 작용하므로 토크 $-Nr$를 가하여 $-Nr\omega$의 비율로 일을 한다. 이 둘이 상쇄되므로 전체 운동 에너지는 보존된다.

$$\tfrac{1}{2}mk^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\omega^2) = \tfrac{1}{2}mk^2\Omega^2 + \tfrac{1}{2}m(V^2 + a^2\Omega^2).$$

따라서

$$\dot r^2 = V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 - (k^2+r^2)\omega^2.$$

주어진 조건 $V^2 = \Omega^2a^2(k^2+a^2)/k^2$를 쓰면

$$V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)\,\frac{a^2+k^2}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2},$$

이고, 각운동량의 결과로부터 $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$이다. 그러므로

$$\dot r^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+r^2}\right) = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2\,r^2}{k^2(k^2+r^2)}.$$

입자가 축을 향해 움직이는 동안 $\dot r<0$이므로 음의 제곱근을 택한다($r>0$).

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}},$$

이것이 구하는 식이다.

경로

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t > 0$이므로 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}} \cdot \frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r(k^2+r^2)^{1/2}}{k},$$

즉 $k\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -r(k^2+r^2)^{1/2}$이다. Ω와 a가 사라졌다는 점에 주목하자.

이제 $u = 1/r$로 놓으면 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -u^{-2}\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta$이고 $r(k^2+r^2)^{1/2} = u^{-2}(1+k^2u^2)^{1/2}$이다($u > 0$이므로). 방정식은 다음과 같이 된다.

$$k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{1+k^2u^2}.$$

제곱근을 보면 쌍곡선 함수 치환(hyperbolic substitution)이 떠오른다. $ku = \sinh\phi$로 놓자. 그러면 $k\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta = \cosh\phi\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$이고 $\sqrt{1+\sinh^2\phi} = \cosh\phi$이므로

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \phi = \theta + \alpha.$$

$\theta = 0$일 때 $r = a$이므로 $\sinh\alpha = ku = k/a$이다. 따라서 $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$, 즉

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k, \qquad \sinh\alpha = \frac{k}{a}.$$

입자는 결코 축에 도달하지 않는다

> **생각해 보기** $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$는 $\theta \to \infty$일 때 0으로 간다. 원판이 유한한 시간 동안 무한한 각만큼 회전할 수 있을까?

그렇지 않다. $r^2 \geq 0$이므로 $\omega = \Omega(k^2+a^2)/(k^2+r^2) \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$이고, 따라서 시각 t까지 원판이 회전한 각은 많아야 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$로 유한하다. 유한한 θ에 대하여 $\sinh(\theta+\alpha)$는 유한하므로 $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$이다. 또한 모든 $r > 0$에 대하여 $\dot{r}$는 엄밀히 음수이므로 입자는 멈추었다가 되돌아가는 일이 없다. 따라서 위의 공식들은 모든 t에 대하여 성립하며, r는 0을 향해 감소하지만 결코 0에 도달하지 않는다.

(다른 방법으로, $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$에 대한 식에서 바로 보일 수도 있다. a에서 r까지 가는 데 걸리는 시간은 $\frac{k}{\Omega(k^2+a^2)}\int_r^a \frac{\sqrt{k^2+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$이고, $x = 0$ 근처에서 피적분함수는 k/x처럼 행동하므로 그 적분은 $r \to 0$일 때 로그적으로 발산한다.)

검산

- $t = 0$일 때 $r = a$이면 $\omega = \Omega$이고 $\dot{r} = -\Omega a\sqrt{k^2+a^2}/k = -V$이므로 초기 조건과 일치한다. 또 $\theta = 0$이면 $r = k/\sinh\alpha = a$이다.

- θ가 클 때 $r \approx 2ke^{-(\theta+\alpha)}$이다. 입자는 지수적으로 나선을 그리며 안쪽으로 들어가며, 결코 도달하지 않는다는 결과와 부합한다.
- 무작위로 고른 k, a, Ω에 대하여 운동 방정식($\ddot{r} = r\omega^2$, 각운동량 고정)을 수치적으로 단계별로 풀어 보면 $\dot{r}$, 에너지, $r\sinh(\theta+\alpha) = k$가 약 10^{-12}의 정확도로 재현된다. $k = a = \Omega = 1$일 때 $r = 10^{-8}$에 이르는 시간은 약 9.32이며, $\frac{1}{2}\ln(1/r)$처럼 증가한다.

흔한 실수

- 입자 혼자만의 에너지가 보존된다고 가정하는 것. 홈의 반작용이 입자에 일을 하므로 전체 에너지만 보존된다.
- 입자의 운동 에너지나 각운동량에서 가로 방향 속도 $r\omega$를 빠뜨리는 것.
- 시간이 유한할 때 θ가 유한하게 유지되는지 확인하지 않고, 유한한 θ에 대해 $r > 0$이라는 것만으로 입자가 축에 도달하지 않는다고 결론짓는 것.

STEP 너머

V에 대한 특별한 조건은 입자를 정확히 $r = 0$을 향해 영원히 조금씩 다가가는 궤적 위에 놓는다. 회전 좌표계(rotating frame)에서 $r = 0$은 불안정 평형점(unstable equilibrium)이고, 이 궤적은 그 평형점의 **안정 다양체**(*stable manifold*)이다. V가 조금이라도 더 크면 입자는 중심을 지나가고, 조금이라도 더 작으면 되돌아간다. 이와 같은 아이디어는 결합된 물체들에 대한 보존 법칙과 함께 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에 나온다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.