풀이

STEP II 1990, 문제 10

순수수학 • 행렬 다항방정식

> **STEP II 1990, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q10

핵심 아이디어

행렬식(determinant)은 행렬의 곱을 보통의 수의 곱으로 바꾸어 주고, 실수의 곱은 인수 중 하나가 0일 때에만 0이 된다. 삼차식의 경우 $\mathbf{M}$은 $\mathbf{I}$와 교환 가능(commute)하므로, $\mathbf{M}$에 대한 행렬 다항식은 x에 대한 다항식과 똑같이 인수분해(factorise)된다. 여기에 상삼각행렬(upper triangular matrix)은 아주 다루기 좋다. 곱의 대각성분은 각 대각성분의 곱일 뿐이므로 대각선은 금방 처리되고, 실제로 계산이 필요한 것은 오른쪽 위 구석뿐이다.

풀이

$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$인 행렬

곱의 행렬식은 행렬식의 곱이므로

$$\det \mathbf{A} \, \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{0} = 0.$$

좌변은 두 실수의 곱이므로 둘 중 적어도 하나는 0이다. 즉 $\det \mathbf{A} = 0$이거나 $\det \mathbf{B} = 0$이거나 둘 다이다. 이것이 증명(proof)하려던 결과이다.

$\det \mathbf{B} \neq 0$이면 $\mathbf{B}^{-1}$이 존재하고, $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$의 양변 오른쪽에 $\mathbf{B}^{-1}$을 곱하면

$$\mathbf{A} = \mathbf{ABB}^{-1} = \mathbf{0}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}.$$

따라서 $\mathbf{A}$는 영행렬(zero matrix)이어야 한다.

그러나 두 행렬식이 모두 0이라는 것만으로는 충분하지 않다. 다음과 같이 잡아 보자.

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

그러면 $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$이지만 $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$이다.

삼차식의 인수분해

먼저 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$을 인수분해한다. 6의 작은 약수들을 대입해 보면

$$f(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0,$$
$$f(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0,$$
$$f(-3) = -27 + 18 + 15 - 6 = 0,$$

이고, 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$이다.

이제 $(\mathbf{M} + p\mathbf{I})(\mathbf{M} + q\mathbf{I})(\mathbf{M} + r\mathbf{I})$를 전개하자. $\mathbf{I}$는 $\mathbf{M}$과 교환 가능하므로(그리고 $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$이므로) 전개 결과는 수의 경우와 완전히 같다.

$$\mathbf{M}^3 + (p+q+r)\mathbf{M}^2 + (pq+qr+rp)\mathbf{M} + pqr\,\mathbf{I}.$$

위의 다항식과 비교하면

$$p = 1, \qquad q = -2, \qquad r = 3$$

으로 잡을 수 있고(순서는 상관없다), 그러면 모든 정사각행렬 $\mathbf{M}$에 대하여 $\mathbf{M}^3 + 2\mathbf{M}^2 - 5\mathbf{M} - 6\mathbf{I} = (\mathbf{M} + \mathbf{I})(\mathbf{M} - 2\mathbf{I})(\mathbf{M} + 3\mathbf{I})$이다.

생각해 보기 이제 세 인수 중 하나는 영행렬이어야 한다고 말할 수 있을까?

그렇지 않다. 첫 번째 부분에서 보았듯이 행렬의 곱은 어느 인수도 영행렬이 아니면서 영행렬이 될 수 있다. 알 수 있는 것은 적어도 한 인수가 특이(singular)행렬이라는 것뿐이다. 따라서 직접 계산해야 한다.

상삼각행렬 해

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$라 하자. 각 인수는 오른쪽 위 성분이 똑같이 c인 상삼각행렬이다.

$$\mathbf{M} + k\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a+k & c \\ 0 & b+k \end{pmatrix}.$$

대각성분이 (d_i, e_i)이고 오른쪽 위 성분이 모두 c인 세 상삼각행렬을 곱하면

$$\begin{pmatrix} d_1 & c \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 & c \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_3 & c \\ 0 & e_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_1 d_2 d_3 & c\,(d_1 d_2 + d_1 e_3 + e_2 e_3) \\ 0 & e_1 e_2 e_3 \end{pmatrix}.$$

$d_1, d_2, d_3 = a+1, a-2, a+3$, $e_1, e_2, e_3 = b+1, b-2, b+3$으로 놓으면 주어진 방정식은 다음 세 조건이 된다.

$$(a+1)(a-2)(a+3) = 0,$$
$$(b+1)(b-2)(b+3) = 0,$$
$$c\,[(a+1)(a-2) + (a+1)(b+3) + (b-2)(b+3)] = 0.$$

처음 두 조건은 $a, b \in \{-1, 2, -3\}$임을 뜻한다. 세 번째 조건의 괄호를 전개하면

$$(a^2 - a - 2) + (ab + 3a + b + 3) + (b^2 + b - 6) = a^2 + ab + b^2 + 2(a+b) - 5.$$

생각해 보기 아홉 쌍을 모두 대입해 보는 것보다 이 괄호가 언제 0이 되는지 더 영리하게 알아내는 방법이 있을까?

있다. $a \neq b$이면 괄호는

$$\frac{a^3 - b^3}{a-b} + 2\,\frac{a^2 - b^2}{a-b} - 5\,\frac{a-b}{a-b} = \frac{f(a) - f(b)}{a-b},$$

이고, $f(a) = f(b) = 0$이므로 이 값은 0이다. 따라서 $a \neq b$일 때는 c가 무엇이든 세 번째 조건이 성립한다.

$a = b$이면 괄호는 $3a^2 + 4a - 5 = f'(a)$이다. 이 값은 $a = -1, 2, -3$에서 각각 $-6, 15, 10$이므로(어느 것도 0이 아닌데, f가 서로 다른 세 근을 갖기 때문이다) 세 번째 조건에 의해 $c = 0$이어야 한다.

따라서 해는 다음과 같다.

- a와 b가 $\{-1, 2, -3\}$에서 고른 **서로 다른** 수이고 c가 **임의의** 실수인 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (여섯 개의 族, 즉 여섯 가지 꼴);
- 세 스칼라 행렬(scalar matrix) $-\mathbf{I}$, $2\mathbf{I}$, $-3\mathbf{I}$ ($a = b$인 경우로, 이때는 $c = 0$이어야 한다).

검산

$a = -1, b = 2, c = 5$로 잡자. 그러면 $\mathbf{M} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} + 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$이다. 처음 두 행렬의 곱이 이미 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로, 어떤 c에 대해서도 전체 곱은 영행렬이 된다. 한편 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$이면 $\mathbf{M}^3 + 2\mathbf{M}^2 - 5\mathbf{M} - 6\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$이고, 이는 $f'(2) = 15$와 일치한다. 여러 유리수 a, b, c에 대한 컴퓨터 탐색으로 정확히 위의 해들만 찾아졌고, 인수분해는 무작위 3×3 정수 행렬로 확인하였다.

흔한 실수

- $(\mathbf{M}+\mathbf{I})(\mathbf{M}-2\mathbf{I})(\mathbf{M}+3\mathbf{I})=\mathbf{0}$으로부터 $\mathbf{M}$이 $-\mathbf{I}$, $2\mathbf{I}$, $-3\mathbf{I}$ 중 하나여야 한다고 결론 내리는 것. 첫 번째 부분은 바로 이 실수를 경고하기 위해 있는 것이다.
- $a=b$인 경우를 빠뜨리거나, 그 경우에도 c가 자유롭다고 가정하는 것.
- 첫 번째 부분의 예를 실수로 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$이 되도록 쓰는 것. 곱이 정말로 영행렬이 아닌지 확인하라.

STEP 너머

이 답은 **최소다항식**(minimal polynomial)을 처음 엿보는 것이다. 행렬이 서로 다른 근을 갖는 다항식을 만족할 필요충분조건은 그 행렬이 대각화 가능(diagonalisable)하고 고유값(eigenvalue)이 모두 그 근들 가운데 있는 것이다. $a\neq b$인 해는 모든 c에 대해 대각화 가능하지만, $c\neq 0$인 $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$는 그렇지 않으며, 이것이 해가 되지 못하는 이유이다. 구석에 나타나는 분할차분(divided difference) $\big(f(a)-f(b)\big)/(a-b)$가 $a=b$일 때 $f'(a)$가 되는 것은, 일반적으로 행렬의 함수를 정의하는 방식 그대로이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 고유값과 대각화를 명쾌하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.