풀이

STEP II 1990, 문제 1

순수수학 • 다항식 부등식

> **STEP II 1990, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q1

핵심 아이디어

실근을 갖지 않는 사차식이란 결국 항상 양수인 사차식이다. 따라서 이 식을 음이 아니라는 것을 이미 아는 조각들, 즉 완전제곱식이나 특정 구간에서 부호가 분명한 곱으로 나누는 방법을 찾는다. 어느 하나의 분해가 모든 곳에서 통하지는 않지만, 구간마다 다른 분해가 통하고 이들을 합치면 실수 전체를 덮는다. 첫 번째 부분에서는 조각들이 주어지지만, 마지막 부분에서는 그 조각들을 스스로 찾아야 한다.

풀이

음이 아닌 두 식

사차식을 인수분해하고 이차식을 완전제곱식으로 고치면

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = x^2(x-1)^2,$$
$$x^2 - 8x + 17 = (x-4)^2 + 1.$$

첫 번째 식은 두 제곱의 곱이므로 모든 실수 x에 대하여 ≥ 0이다. 두 번째 식은 제곱에 1을 더한 것이므로 적어도 1이고, 특히 음이 아니다.

첫 번째 방정식

$p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 17$이라 하자. p는 위의 두 식의 합이 아니라는 점에 주의한다(그 합에는 x^2이 아니라 $2x^2$이 있다). 그래서 두 식을 단순히 더할 수는 없다. 대신 구간마다 p를 다르게 나누어 모든 곳에서 $p(x) > 0$임을 보인다.

생각해 보기 문제는 음이 아닌 두 식을 주지만, 그 합은 $p(x)$가 되지 않는다. 그래도 이 식들을 어떻게 활용할 수 있을까?

각 식을 실수 직선의 일부에서 "빌려" 쓸 수 있다. 한 구간에서는 사차식 $x^2(x-1)^2$을 그대로 두고 나머지 $17-8x$를 직접 다룬다. 다른 구간에서는 이차식 $(x-4)^2+1$을 그대로 두고 나머지 x^4-2x^3을 직접 다룬다.

경우 $x \le 0$. 이때 $x^4 \ge 0$, $-2x^3 \ge 0$($x^3 \le 0$이므로), $x^2 \ge 0$, $-8x \ge 0$이다. 따라서 $p(x)$의 모든 항이 음이 아니고, 상수 17 때문에 합은 적어도 17이다. 그러므로 $p(x) > 0$이다.

경우 $0 < x \le 2$. 다음과 같이 쓴다.

$$p(x) = x^2(x-1)^2 + (17-8x).$$

첫 번째 괄호는 ≥ 0이고, $x \le 2$이므로 $17-8x \ge 17-16 = 1$이다. 따라서 $p(x) \ge 1 > 0$이다.

경우 $x > 2$. 다음과 같이 쓴다.

$$p(x) = x^3(x-2) + \left(x^2 - 8x + 17\right) = x^3(x-2) + (x-4)^2 + 1.$$

$x > 2$이므로 x^3과 $x-2$가 모두 양수이고, 따라서 $x^3(x-2) > 0$이다. 또 $(x-4)^2+1 \ge 1$이다. 따라서 $p(x) > 1 > 0$이다.

세 구간은 모든 실수를 덮고 각 구간에서 $p(x) > 0$이므로, $p(x) = 0$은 실근(real root)을 갖지 않는다.

두 번째 방정식

$q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$라 하자. 같은 방법을 따르되, 이번에는 분해를 스스로 고른다.

생각해 보기 실수 직선을 어디에서 나누어야 하고, 어떤 항들을 짝지어 묶어야 할까?

각 묶음이 자기 구간에서 부호가 분명하기를 바란다. 묶음 $4-4x = 4(1-x)$는 $x \le 1$에서 음이 아니다. $x \ge 1$에서는 묶음 $x^4 - x^3 = x^3(x-1)$이 음이 아니고, 나머지 $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$은 완전제곱식(perfect square)이다. 따라서 자연스러운 경계는 $x = 1$이다.

경우 $x \le 1$**.** 다음과 같이 쓴다.

$$q(x) = \left(x^4 - x^3 + x^2\right) + 4(1-x) = x^2\left[\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right] + 4(1-x).$$

첫 번째 항은 ≥ 0이고 $x = 0$일 때만 0이다(대괄호 안은 적어도 $\frac{3}{4}$이다). 두 번째 항은 $x \le 1$이므로 ≥ 0이고, $x = 1$일 때만 0이다. 두 항이 동시에 0일 수는 없으므로 $q(x) > 0$이다.

경우 $x \ge 1$**.** 다음과 같이 쓴다.

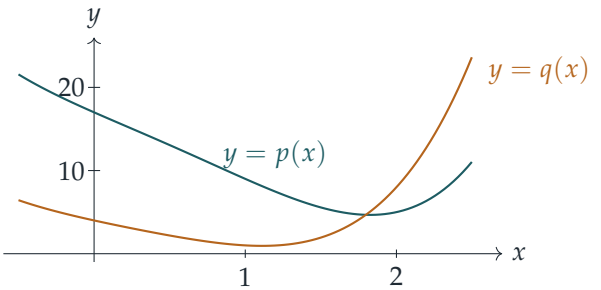
$$q(x) = x^3(x-1) + \left(x^2 - 4x + 4\right) = x^3(x-1) + (x-2)^2.$$

$x \ge 1$이면 x^3과 $x - 1$이 모두 음이 아니므로 첫 번째 항은 ≥ 0이고, $x = 1$에서만 0이다. 두 번째 항은 제곱이며 $x = 2$에서만 0이다. 이번에도 두 항이 동시에 0이 될 수 없으므로 $q(x) > 0$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $q(x) > 0$이고, $q(x) = 0$은 실근을 갖지 않는다.

검산

- 각 분해를 전개하여 정말로 p나 q가 되는지 확인한다. 예를 들어 $x^3(x-1) + (x-2)^2 = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$이다.
- $-5 \le x \le 8$을 10^{-4} 간격으로 수치 탐색하면 p의 최솟값은 약 4.67($x \approx 1.83$ 근처), q의 최솟값은 약 0.94($x \approx 1.11$ 근처)이다. 그림에서 보듯이 둘 다 넉넉하게 양수이다.



흔한 실수

- 주어진 두 식을 더하고 그 합이 $p(x)$라고 주장하는 것. x^2항이 맞지 않으므로 그렇지 않다.
- "음이 아닌 항 더하기 음이 아닌 항"으로부터 $q(x) > 0$이라고 결론짓는 것. 이로부터는 $q(x) \ge 0$만 얻는다. 근이 없음을 보이려면 두 항이 동시에 0이 될 수 없음을 보여야 한다.

- $-2x^3$이나 $-8x$의 부호가 항상 음이라고 생각하는 것. $x \leq 0$에서는 이 항들이 오히려 도움이 된다.

STEP 너머

다항식을 제곱의 합(sum of squares)으로 나타내어 양수임을 보이는 것은 본격적인 연구 주제이다. 일변수의 음이 아닌 다항식은 모두 두 실계수 다항식의 제곱의 합으로 나타낼 수 있지만, 힐베르트(Hilbert)는 다변수에서는 이것이 성립하지 않음을 보였고, 이는 그의 제17문제로 이어졌다. 오늘날에는 최적화(optimisation) 문제에서 컴퓨터가 이러한 분해를 찾는다. 이런 종류의 부등식 기법을 더 많이 접하고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)가 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.