풀이

STEP I 1990, 문제 9

순수수학 • 접선과 넓이의 한계

> **STEP I 1990, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q9

핵심 아이디어

곡선 $y = 1/x$는 위로 휘어 있으므로(즉, 볼록(convex)하므로) 모든 접선(tangent)은 곡선 아래에 놓인다. 따라서 접선 아래의 두 사다리꼴(trapezium)은 $x = 1$과 $x = b$ 사이에서 곡선 아래 영역 안에 들어가고, 그 영역의 넓이는 $\ln b$이다. 두 넓이를 비교하면 로그의 하한(lower bound)을 얻는다. 같은 방법으로 곡선 위에 놓인 직사각형으로부터 상한(upper bound)을 얻는다.

풀이

점 C

$y = 1/x$에 대하여 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1/x^2$이다. 따라서 $(t, 1/t)$에서의 접선은

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t), \qquad \text{즉} \qquad y = \frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}.$$

$t = 1$이면 A에서의 접선은 $y = 2 - x$이다. $t = b$이면 B에서의 접선은 $y = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2}$이다. 두 접선이 만나는 점에서

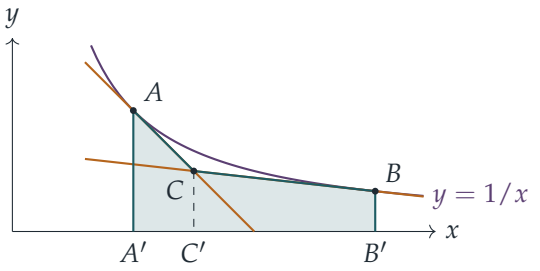
$$2 - x = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad x\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

$b > 1$이므로 $1 - \frac{1}{b} \neq 0$으로 나눌 수 있고, 그러면 $x\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 2$가 남는다. 따라서

$$C = \left(\frac{2b}{b+1}, \frac{2}{b+1}\right),$$

이고, 여기서 y좌표는 $y = 2 - x$에서 얻는다. $1 < \frac{2b}{b+1} < b$임에 주목하자. 왼쪽 부등식은 $b + 1 < 2b$이고, 오른쪽 부등식은 $2 < b + 1$이다. $b > 1$이므로 둘 다 성립하고, 따라서 C는

가로 방향으로 A와 B 사이에 있다.



그림은 $b = 3$인 경우를 그린 것이다. 색칠한 영역은 두 사각형으로 이루어져 있다.

넓이의 합

각 사각형은 두 변이 세로이므로 사다리꼴이고, 그 넓이는 폭에 두 세로 변의 평균을 곱한 것이다.

$ACC'A'$의 폭은 $\frac{2b}{b+1} - 1 = \frac{b-1}{b+1}$이고, 세로 변은 1과 $\frac{2}{b+1}$이다.

$$\text{넓이}(ACC'A') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-1}{b+1}\left(1 + \frac{2}{b+1}\right) = \frac{(b-1)(b+3)}{2(b+1)^2}.$$

$CBB'C'$의 폭은 $b - \frac{2b}{b+1} = \frac{b(b-1)}{b+1}$이고, 세로 변은 $\frac{2}{b+1}$과 $\frac{1}{b}$이다.

$$\text{넓이}(CBB'C') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b(b-1)}{b+1}\left(\frac{2}{b+1} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(b-1)(3b+1)}{2(b+1)^2}.$$

더하면 분자는 $(b-1)(4b+4) = 4(b-1)(b+1)$이 되므로

$$\text{넓이}(ACC'A') + \text{넓이}(CBB'C') = \frac{2(b-1)}{b+1}.$$

부등식

생각해 보기 두 사다리꼴이 왜 반드시 곡선 아래에 들어가야 할까?

$x > 0$일 때, 곡선과 $(t, 1/t)$에서의 접선 사이의 차는

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}\right) = \frac{t^2 - 2tx + x^2}{t^2 x} = \frac{(x-t)^2}{t^2 x} \geq 0.$$

따라서 각 접선은 모든 $x > 0$에 대하여 곡선 위에 있거나 곡선 아래에 놓인다. 색칠한 영역의 윗변은 $[1, \frac{2b}{b+1}]$에서는 A에서의 접선이고 $[\frac{2b}{b+1}, b]$에서는 B에서의 접선이다. 두 부분 모두 $y = 1/x$ 아래에 놓이고, 영역은 x축 위에 있다. 따라서 색칠한 영역은 $x = 1$부터 $x = b$까지

곡선 아래 영역에 포함되고,

$$\frac{2(b-1)}{b+1} \le \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b.$$

상한에 대해서는, $x \ge 1$이면 $\frac{1}{x} \le 1$이므로 곡선 아래 영역은 밑변이 $A'B'$이고 높이가 1인 직사각형 안에 놓인다. 따라서

$$\ln b = \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \le \int_1^b 1\,\mathrm{d}x = b-1.$$

이제 $z > 0$이라 하고 $b = 1+z$로 놓으면, 요구한 대로 $b > 1$이다. 그러면 $b-1 = z$이고 $b+1 = 2+z$이므로 두 부등식을 합치면

$$\frac{2z}{2+z} \le \ln(1+z) \le z,$$

가 되고, 이것이 증명해야 할 것이었다. (곡선과 경계가 되는 직선들은 고립된 점에서만 만나므로, 사실 $z > 0$일 때 두 부등식은 모두 등호 없이 성립한다.)

검산

- $b = 1$이면 C는 $(1,1) = A$가 되고 넓이의 합은 0이 되는데, 마땅히 그래야 한다.
- $b = 2$이면 $C = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$이고 넓이의 합은 $\frac{2}{3} \approx 0.667$로, $\ln 2 \approx 0.693$보다 약간 작으며, 이 값은 다시 1보다 작다.
- z가 작을 때 $\frac{2z}{2+z} = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$는 z^2 항까지 $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$와 일치하므로, 하한은 0 근처에서 매우 정밀하다.

여러 b 값에 대하여 좌표와 두 사다리꼴의 넓이를 정확한 산술로 확인했고, 10^{-6}과 10^{6} 사이의 무작위 z 10^5개에 대하여 부등식을 확인했다.

흔한 실수

- C가 $x = 1$과 $x = b$ 사이에 있는지 확인하는 것을 잊는다. 이것이 없으면 "사각형"이 생각하는 모양이 아닐 수도 있다.
- 접선이 곡선 아래에 있다고 "그림을 보고" 말한다. $(x-t)^2$을 이용한 한 줄짜리 계산이 있어야 증명이 된다.

STEP 너머

함수를 그래프 위아래의 간단한 도형과 비교하는 것은 리만 합(Riemann sums)의 바탕에 있는 아이디어이며, 첫 해석학(analysis) 강의에서 적분을 엄밀하게 정의하는 방법이기도

하다. 볼록함수의 접선이 그래프 아래에 놓인다는 사실은 볼록함수(convex function) 이론의 출발점이다. 이로부터 옌센 부등식(Jensen's inequality)과, 산술-기하 평균 부등식(AM–GM)을 비롯한 많은 고전적인 부등식이 나온다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 바로 이러한 정신으로 적분을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.