풀이

STEP I 1990, 문제 8

순수수학 • 삼각함수의 무한곱

> **STEP I 1990, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q8

핵심 아이디어

배각 공식(double-angle formula) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$를 쓰면 각 코사인을 두 사인의 비 $\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$로 바꿀 수 있다. 이런 비들을 서로 곱하면 망원급수(telescoping sum)처럼 거의 모든 것이 약분된다. 유한곱이 하나의 깔끔한 분수가 되고 나면, $n \to \infty$로 보낼 때 필요한 것은 $x \to 0$일 때 $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$이라는 표준적인 극한(limit)뿐이다.

풀이

α에 대한 조건에 관하여

아래의 모든 단계에서는 어떤 $m \geq 0$에 대하여 $\sin(\alpha/2^m)$으로 나누므로, 이 값들이 결코 0이 되지 않아야 한다. 만약 $\sin(\alpha/2^m) = 0$이면 어떤 정수 j에 대하여 $\alpha/2^m = j\pi$이므로 $\alpha = (2^m j)\pi$는 π의 정수배가 되는데, 이는 조건에서 제외된 경우이다. 따라서 모든 $m \geq 0$에 대하여 $\sin(\alpha/2^m) \neq 0$이다.

두 코사인의 곱

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$를 두 번, 먼저 $\theta = \alpha/2$로, 다음에 $\theta = \alpha/4$로 적용하면

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ &= 2\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}.\end{aligned}$$

이다. $\sin(\alpha/4) \neq 0$이므로 $4\sin(\alpha/4)$로 나눌 수 있고, 그러면

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\alpha}{4\sin(\alpha/4)},$$

을 얻는다. 이것이 보이려던 식이다.

n개의 코사인의 곱

$P_n = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$이라 하자. n에 대한 수학적 귀납법(induction)으로

$$P_n = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}.$$

임을 증명한다. $n = 1$일 때 이 식은 $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)}$가 되는데, 이는 배각 공식을 $2\sin(\alpha/2) \neq 0$으로 나눈 것이다. ($n = 2$인 경우는 방금 보인 결과이다.)

이제 어떤 $n \geq 1$에 대하여 이 식이 성립한다고 가정하자. $\theta = \alpha/2^{n+1}$로 배각 공식을 쓰면 $\sin\frac{\alpha}{2^n} = 2\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$이다. 따라서

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} &= \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin\alpha\,\cos(\alpha/2^{n+1})}{2^n\cdot 2\sin(\alpha/2^{n+1})\cos(\alpha/2^{n+1})} = \frac{\sin\alpha}{2^{n+1}\sin(\alpha/2^{n+1})}. \end{aligned}$$

이다. $\cos(\alpha/2^{n+1})$을 약분하는 것은 정당하다. 이 값은 0이 아닌 $\sin(\alpha/2^n)$의 인수이므로 역시 0이 아니기 때문이다. 이것이 $n+1$일 때의 식이므로, 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 식이 성립한다.

$n \to \infty$로 보내기

무한곱(infinite product)은 부분곱(partial product) P_n의 극한을 뜻한다. $x_n = \alpha/2^n$이라 두면 $n \to \infty$일 때 $x_n \to 0$이고,

$$2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha\cdot\frac{\sin x_n}{x_n} \longrightarrow \alpha\cdot 1 = \alpha.$$

이다.

생각해 보기 $\lim P_n = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$의 역수를 취해도 괜찮은 이유는 무엇인가?

극한이 0이 아니기 때문이다. 우리가 다루는 α에 대해서는 $\alpha \neq 0$이고 $\sin\alpha \neq 0$이다. 따라서 $P_n \to \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \neq 0$이므로 무한곱이 존재하고, $\sin\alpha$를 이것으로 나누면

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha}{P_n} = \lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha,$$

를 얻는다. 이것이 구하려던 식이다.

$\pi/2$에 대한 공식

π의 정수배가 아닌 $\alpha = \pi/2$를 택하면 $\sin\alpha = 1$이다. 그러면

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots}.$$

이다. 이제 각 코사인이 중첩된 제곱근임을 보이면 된다. $k \geq 1$에 대하여 $c_k = \cos(\pi/2^{k+1})$이라 하자. 그러면 $c_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$이다. 반각 공식(half-angle formula) $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$에 $\theta = \pi/2^{k+2}$를 대입하면

$$c_{k+1}^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k, \qquad \text{이므로} \qquad c_{k+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k},$$

이다. 여기서 $0 < \pi/2^{k+2} < \pi/2$이므로 $c_{k+1} > 0$이어서 양의 제곱근을 택한다. 따라서

$$c_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad c_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad c_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}, \quad \ldots,$$

이고, 각 인수는 바로 앞의 인수를 $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t}$에 넣은 것이다. 이들은 구하려는 곱의 인수들과 정확히 같으므로

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

이다.

검산

- $\alpha = \pi/2, n = 1$일 때 유한곱 공식은 $\cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2\sin(\pi/4)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$를 주며, 이는 옳다.
- 중첩 근호의 부분곱의 역수는 1.4142, 1.5307, 1.5607, 1.5683, 1.5702, …이고, 60개의 인수를 곱하면 1.5707963267949를 얻어 기계 정밀도 내에서 $\pi/2$와 일치한다.
- 유한 항등식은 임의의 α와 14 이하의 n에 대해서도 수치적으로 확인되며, $\alpha = 2.5$나 $\alpha = -4$ 같은 값에 대하여 $\sin\alpha / P_{60}$은 α를 재현한다.

흔한 실수

- $\sin(\alpha/2^n)$이 왜 0이 아닌지 말하지 않고 그것으로 나누는 것. 이것이 바로 $\alpha \neq k\pi$라는 조건이 있는 이유이다.
- $\lim P_n \neq 0$임을 언급하지 않고 $1/\lim P_n = \lim(1/P_n)$이라고 쓰는 것.
- 반각 단계에서 양의 제곱근을 택하는 근거를 대지 않는 것.

STEP 너머

마지막 공식은 1593년의 비에트(Viète)의 곱으로, 역사상 처음으로 쓰인 π에 대한 정확한 무한 표현이다. 대학에서는 해석학(analysis)에서 무한곱을 제대로 배우는데, 0이 아닌 인수들의 곱은 부분곱이 *0이 아닌* 극한으로 갈 때 수렴(converge)한다고 한다. 이것이 바로 우리가 확인한 점이다. 오일러(Euler)의 곱 $\sin\alpha = \alpha\prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2\pi^2}\right)$은 이보다 더 깊은 친척이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이런 극한을 엄밀하게 다루는 방법을 보기에 친절한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.