풀이

STEP I 1990, 문제 7

순수수학 • 일계 선형 상미분방정식

> **STEP I 1990, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q7

핵심 아이디어

$y = uv$로 놓으면 미지 함수가 하나만 필요한 자리에 두 개가 생기므로, 그중 하나에 조건을 하나 더 부과할 여유가 생긴다. 자연스러운 선택은 u가 P를 포함한 항을 없애도록 하는 것이다. 그러면 바로 적분할 수 있는 미분방정식(differential equation)이 남는다. 이것은 모습을 바꾼 적분인자법(integrating-factor method)이며, $1/u$가 바로 적분인자이다.

풀이

치환

$y = uv$이면 곱의 미분법(product rule)에 의해 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$이므로 방정식은 다음과 같이 된다.

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu\right) = Q.$$

u가 1계 방정식

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu = 0,$$

을 만족하도록 고르면 괄호 안이 0이 되고, 다음이 남는다.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{Q}{u},$$

이것은 요구한 대로 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$를 x, Q, u만으로 나타낸 방정식이다. (나누려면 $u \neq 0$이어야 한다. $u' + Pu = 0$의 0이 아닌 해는 $A \neq 0$인 $u = A\mathrm{e}^{-\int P\,\mathrm{d}x}$이고, 이는 결코 0이 되지 않는다.)

주어진 방정식

여기서 $P = -\dfrac{2}{x+1}$이고 $Q = (x+1)^{5/2}$이다. Q는 $x \geq -1$일 때만 (실수로서) 정의되고 P는 $x = -1$에서 정의되지 않으므로, $x+1 > 0$인 $x > -1$에서 생각한다.

> **생각해 보기** u의 일반해가 필요할까, 아니면 해 하나면 충분할까?

0이 아닌 해 하나면 충분하다. 최종 답의 임의상수는 v를 구하려고 적분할 때 나타나기 때문이다. 따라서

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u}{x+1}$$

를 변수분리(separating variables)로 풀면 $\ln|u| = 2\ln(x+1) +$ 상수이고, 다음을 택한다.

$$u = (x+1)^2.$$

(확인: $u' = 2(x+1) = \frac{2u}{x+1}$.) 그러면

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+1)^{5/2}}{(x+1)^2} = (x+1)^{1/2}, \qquad \text{따라서} \qquad v = \tfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

그러므로 일반해(general solution)는 다음과 같다.

$$y = uv = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} + C(x+1)^2.$$

$y(1) = 0$을 적용하면

$$0 = \tfrac{2}{3}\cdot 2^{7/2} + 4C \quad \Longrightarrow \quad C = -\tfrac{1}{6}\cdot 2^{7/2} = -\tfrac{1}{6}\cdot 8\sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

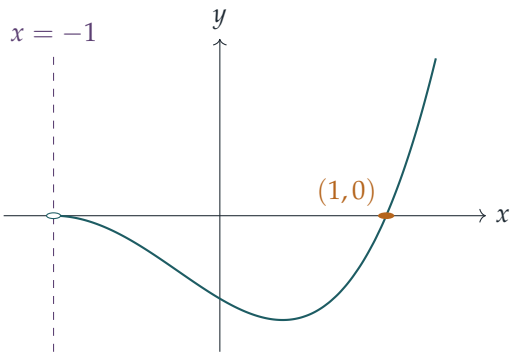
따라서

$$\boxed{y = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} - \tfrac{4\sqrt{2}}{3}(x+1)^2 = \tfrac{2}{3}(x+1)^2\left[(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]}$$

해가 유효한 범위

> **생각해 보기** y의 식은 $x = -1$에서도 의미가 있다. 그런데 왜 $x = -1$은 포함되지 않을까?

해는 $x > -1$에서 유효하다. $x < -1$이면 우변 $(x+1)^{5/2}$이 실수가 아니므로 미분방정식 자체가 그곳에서 아무 의미가 없다(우리가 구한 $(x+1)^{7/2}$도 마찬가지이다). $x = -1$에서는 항 $\frac{2y}{x+1}$이 정의되지 않으므로, 우리 식에서 $x \to -1^+$일 때 $y \to 0$이 되더라도 방정식은 그곳에서도 성립하지 않는다. $x+1 > 0$인 구간 $x > -1$ 전체에서는 위의 모든 단계가 정당하며, 해는 이 구간에 속하는 주어진 점 $x = 1$을 지난다.



빈 원은 제외된 끝점 $x = -1$을 나타낸다.

검산

- 다시 대입하기: $y' = \frac{7}{3}(x+1)^{5/2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$이고 $\frac{2y}{x+1} = \frac{4}{3}(x+1)^{5/2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$이다. 둘의 차는 요구한 대로 $(x+1)^{5/2}$이다.
- $y(1) = \frac{2}{3} \cdot 4\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = 0$.
- 특정한 값: $y(0) = \frac{2-4\sqrt{2}}{3} \approx -1.219$이고 $y(3) = \frac{256-64\sqrt{2}}{3} \approx 55.16$이다. $y(1) = 0$에서 출발하여 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로) 적분한 결과는 두 값 모두와 유효숫자 아홉 자리까지 일치한다.

흔한 실수

- P의 부호를 틀리는 것: 여기서 $P = -\frac{2}{x+1}$이므로 $u = (x+1)^2$이고, $(x+1)^{-2}$이 아니다.
- v를 구하려고 적분할 때 상수를 빠뜨리는 것: 그러면 $y(1) = 0$에 맞출 자유도가 남지 않는다.
- 범위를 $x \geq -1$로 답하는 것: 방정식은 $x = -1$에서 정의되지 않는다.

STEP 너머

골칫거리 항을 없애도록 u를 고르는 것은 **매개변수 변화법**(variation of parameters)의 바탕이 되는 아이디어이다. 먼저 동차방정식(homogeneous equation)을 풀고, 그다음 "상수"를 변하게 하여 외력 항을 흡수하는 것이다. 같은 기법이 2계 선형방정식에도 통하며, 해가 어디에서 유효한가라는 질문은 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)로 발전한다. 이 정리는 P와 Q가 연속인 임의의 구간에서 유일한 해가 존재함을

보장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)가 두 주제를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.