풀이

STEP I 1990, 문제 6

순수수학 • 벡터와 평행사변형

STEP I 1990, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/90-s1-q6

핵심 아이디어

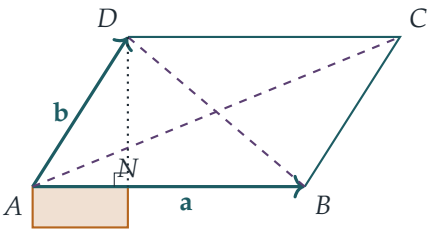
원점을 A에 두고, 모든 것을 두 변 벡터(vector) $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$와 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$로 나타낸다. 그러면 두 대각선은 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$와 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$이고, 모든 길이의 제곱은 어떤 벡터와 자기 자신의 내적(dot product)이다. 이 내적들을 전개하면 모든 일이 끝난다. 필요한 기하는 단 하나, $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|$가 $\mathbf{u}$의 길이와 $\mathbf{v}$를 $\mathbf{u}$ 위로 내린 정사영(projection)의 길이의 곱이라는 사실뿐이다.

풀이

A를 원점으로 잡고, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$라 하자. $ABCD$는 평행사변형(parallelogram)이므로 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$이고, 따라서

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{BD} = \mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

임의의 벡터에 대해 $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$이고, 내적은 교환법칙이 성립하며 덧셈에 대해 분배법칙이 성립한다. $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$라 쓰자.



그림에서 N은 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발이므로, AN은 AD를 AB 위로 내린 정사영이고 그 길이는 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|/a$이다.

소문항 (i)

마주 보는 변의 길이가 같으므로 좌변은 $2a^2 + 2b^2$이다. 대각선에 대해서는

$$AC^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = a^2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2,$$
$$BD^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = a^2 - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2.$$

두 식을 더하면 교차항이 소거되어 $AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$이 되므로, 증명이 끝난다. (이를 흔히 평행사변형 법칙(parallelogram law)이라 부른다.)

소문항 (ii)

이번에는 같은 두 식을 빼면

$$AC^2 - BD^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \qquad \text{따라서} \qquad \left|AC^2 - BD^2\right| = 4\,|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|.$$

이제 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$를 해석해 보자. θ가 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$ 사이의 각이면 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = a\cdot b|\cos\theta|$이고, $b|\cos\theta|$는 정확히 AD를 AB 위로 내린 정사영의 길이 AN이다. 따라서 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$는 AB와, AD를 AB 위로 내린 정사영을 두 변으로 하는 직사각형(그림에서 색칠한 부분)의 넓이이다.

> **생각해 보기** 이 결과는 어느 변을 택하든, 그리고 그에 이웃한 어느 변을 택하든 성립한다고 주장한다. 왜 여덟 가지 경우를 따로 계산할 필요가 없을까?

평행사변형의 각 변은 벡터 $\pm\mathbf{a}$ 또는 $\pm\mathbf{b}$이고, 그 변에 이웃한 두 변은 부호를 제외하면 나머지 벡터이다. 예를 들어 변 BC는 $\mathbf{b}$이고, 이웃한 변 AB와 CD는 $\mathbf{a}$와 $-\mathbf{a}$이다. 정사영의 길이는 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|$이므로, 부호를 바꾸어도 벡터의 길이나 정사영의 길이는 변하지 않는다. 따라서 변과 이웃한 변을 어떻게 택하든 직사각형의 넓이는 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$로 같다. 즉 $a\times$(정사영의 길이, 사영되는 벡터$\mathbf{b}$, 기준 벡터$\mathbf{a}$) 또는 $b\times$(정사영의 길이, 사영되는 벡터$\mathbf{a}$, 기준 벡터$\mathbf{b}$)이고, 둘 다 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$와 같다. 그러므로 모든 경우에

$$\left|AC^2 - BD^2\right| = 4\times(\text{그 직사각형의 넓이}). \qquad \blacksquare$$

마지막 소문항

소문항 (ii)는 두 **변**의 내적에서 나왔다. 변과 대각선의 역할을 바꾸어 두 **대각선**의 내적을 구하면

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = b^2 - a^2,$$

교차항 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$와 $-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$가 소거되기 때문이다. 그러므로

$$\left|AB^2 - AD^2\right| = |\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|.$$

소문항 (ii)에서와 같이 논증하면 다음을 얻는다.

결과. $\left|AB^2 - AD^2\right|$는 한 대각선과, 다른 대각선을 그 위로 내린 정사영을 두 변으로 하는 직사각형의 넓이와 같다. 어느 대각선을 택해도 된다.

증명. φ가 두 대각선 사이의 각이면 $|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}| = AC \cdot BD\,|\cos\varphi|$이다. 여기서 $BD\,|\cos\varphi|$는 BD를 AC 위로 내린 정사영의 길이이고, $AC\,|\cos\varphi|$는 AC를 BD 위로 내린 정사영의 길이이다. 따라서 어느 대각선에서 시작하든 넓이는 같고, 위의 식에 의해 그 값은 $\left|AB^2 - AD^2\right|$이다. ■

(ii)와 더욱 닮은 꼴로 만들려면, 두 대각선이 서로를 이등분하는 점을 O라 하자. 그러면 $AC = 2OA$이고, BD를 AC 위로 내린 정사영은 OB를 OA 위로 내린 정사영의 두 배이다. 따라서 $\left|AB^2 - AD^2\right|$는 OA와, OB를 OA 위로 내린 정사영을 두 변으로 하는 직사각형의 넓이의 4배이기도 하다. 이제는 대각선의 절반이 변의 역할을 하는 것이다.

여기서 두 가지 멋진 따름정리가 자연스럽게 나온다. 두 대각선의 길이가 같을 필요충분조건은 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 즉 평행사변형이 직사각형인 것이다. 두 대각선이 수직일 필요충분조건은 $a = b$, 즉 평행사변형이 마름모인 것이다.

검산

$A = (0,0), B = (4,0), D = (1,2)$로 잡으면 $C = (5,2)$이다. 그러면 $AC^2 = 29, BD^2 = 13$이고 $2(16+5) = 42 = 29 + 13$이므로 (i)이 확인된다. (ii)에서는 $AC^2 - BD^2 = 16$이고, AD를 AB 위로 내린 정사영의 길이는 1이므로 직사각형의 넓이는 $4 \times 1 = 4$이며, $16 = 4 \times 4$이다. 마지막 소문항에서는 $AB^2 - AD^2 = 16 - 5 = 11$이고 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (5,2) \cdot (-3,2) = -11$이다. 또한 세 결과 모두를, 변과 이웃한 변의 모든 선택에 대해, 무작위로 만든 10^5개의 평행사변형에서 검사하였다. 가장 큰 오차는 약 10^{-13}으로, 단순한 반올림 오차에 불과하다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{BD} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 또는 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$로 쓰는 것. BD^2에서는 부호가 상관없지만, 방향을 바르게 잡아두면 나중에 혼란을 피할 수 있다.
- 절댓값을 빠뜨리는 것. A에서의 각이 둔각이면 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$는 음수이지만 넓이는 음수일 수 없다. 그래서 문제에 $\left|AC^2 - BD^2\right|$가 나오는 것이다.
- 마지막 소문항에서 대각선 전체를 쓰면서 4라는 인수를 붙이는 것. 대각선 전체를 쓰면 인수는 1이고, 인수 4는 대각선의 절반을 쓸 때만 나타난다.

STEP 너머

항등식 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$는 **편극 항등식**(polarisation identity)으로, 내적을 길이만으로 복원할 수 있음을 보여 준다. 소문항 (i)의 평행사변형 법칙과 함께, 이는 내적 공간(inner product space)에 관한 핵심적인 사실이다. 노름(norm)이 어떤 내적에서 유도될 필요충분조건은 그 노름이 평행사변형 법칙을 만족하는 것이며, 이는 요르단(Jordan)과 폰 노이만(von Neumann)의 정리이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 내적, 정사영, 직교성이 임의의 차원에서 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.