풀이

STEP I 1990, 문제 5

순수수학 • 부분분수와 곡선의 개형

> **STEP I 1990, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q5

핵심 아이디어

(i)에서는 이차식(quadratic)이 인수분해되므로, 부분분수(partial fractions)를 이용하면 적분이 로그(logarithm)의 차로 바뀐다. (ii)에서는 거듭제곱의 지수가 엄청나게 커서 겁이 나지만, $1760 = 8 \times 220$이므로 이 함수는 사실 $u = x^{220} \geq 0$에 대하여 $u^8 - u + q$일 뿐이다. 그래프의 모양은 정류점(stationary point)에서 결정되며, 근의 개수는 오직 가로축이 극댓값(local maximum)과 두 극솟값(minimum)에 대하여 어디에 놓이는지에 따라서만 달라진다.

풀이

소문항 (i)

$6 \times 15 = 90 = 9 \times 10$이고 $9 + 10 = 19$이므로, 이차식은 다음과 같이 인수분해된다.

$$6x^2 + 19x + 15 = (2x+3)(3x+5).$$

다음과 같이 놓는다.

$$\frac{1}{(2x+3)(3x+5)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x+5}, \qquad \text{따라서} \qquad 1 = A(3x+5) + B(2x+3).$$

$x = -\frac{3}{2}$를 대입하면 $\frac{1}{2}A = 1$이므로 $A = 2$이고, $x = -\frac{5}{3}$을 대입하면 $-\frac{1}{3}B = 1$이므로 $B = -3$이다. $2x+3$과 $3x+5$는 모두 $[1,3]$에서 양수이므로 절댓값 기호는 필요 없다.

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{6x^2+19x+15} &= \int_1^3 \left(\frac{2}{2x+3} - \frac{3}{3x+5}\right)\mathrm{d}x = \Big[\ln(2x+3) - \ln(3x+5)\Big]_1^3 \\ &= \ln\frac{9}{14} - \ln\frac{5}{8} = \ln\frac{72}{70} = \ln\frac{36}{35}.\end{aligned}$$

소문항 (ii)

대칭성과 양 끝에서의 거동. 두 지수가 모두 짝수이므로 f는 우함수(even function)이고, 그 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. $|x|$가 클 때는 x^{1760}항이 지배적이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$이다. 또한 $\mathrm{f}(0) = q$이고 $\mathrm{f}(\pm 1) = q$이다.

정류점. 미분하면 다음을 얻는다.

$$\mathrm{f}'(x) = 1760x^{1759} - 220x^{219} = 220\,x^{219}(8x^{1540} - 1).$$

이 값은 $x = 0$에서, 그리고 $x^{1540} = \frac{1}{8}$인 곳, 곧 다음과 같은 $x = \pm a$에서 0이 된다.

$$a = 8^{-1/1540} \approx 0.9987.$$

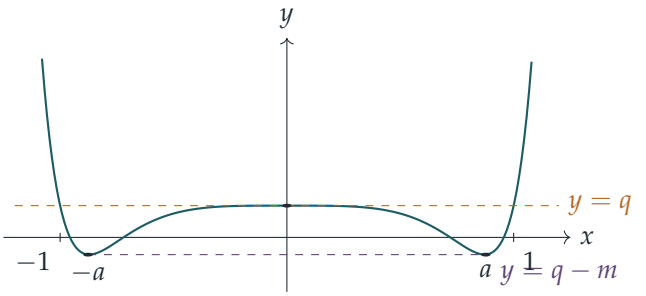
$x > 0$에서 $\mathrm{f}'(x)$의 부호는 $8x^{1540} - 1$의 부호와 같다. 즉 $(0, a)$에서는 음수이고 $x > a$에서는 양수이다. x^{219}는 홀수 차수의 거듭제곱이므로, $x < 0$에서는 부호가 반대가 된다. 따라서 f는 $(-\infty, -a)$에서 감소하고, $(-a, 0)$에서 증가하고, $(0, a)$에서 감소하고, (a, ∞)에서 증가한다. 즉 $x = 0$에서 극댓값 q를 가지고 $x = \pm a$에서 같은 두 극솟값을 가진다.

> **생각해 보기** $8^{-1/1540}$과 씨름하지 않고 극솟값을 어떻게 구할 수 있을까?

$u = x^{220}$을 이용한다. $x = \pm a$에서 $x^{1540} = u^7 = \frac{1}{8}$이므로 $u = 8^{-1/7}$이고 $u^8 = u \cdot u^7 = \frac{1}{8}u$이다. 따라서

$$\mathrm{f}(\pm a) = u^8 - u + q = q - \tfrac{7}{8}u = q - m, \qquad \text{여기서} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

개형 그리기. 그래프는 "W" 모양이다. 높은 곳에서 시작하여 $x = -a$에서 극솟값 $q - m$까지 내려가고, 원점에서 극댓값 q까지 올라갔다가, $x = a$에서 극솟값 $q - m$까지 내려간 뒤 가파르게 올라간다. 지수가 매우 크기 때문에 실제 그래프는 극도로 평평하다. $|x|$가 1에 아주 가깝지 않으면 x^{220}은 매우 작으므로, $(-1, 1)$의 대부분에서 $\mathrm{f}(x) \approx q$이고, $x = \pm 1$(그래프가 다시 높이 q로 돌아오는 곳) 바로 안쪽에 좁게 파인 두 골짜기가 있으며, 그 바깥쪽은 거의 수직인 벽이다. 아래 그림은 특징이 보이도록 골짜기를 과장하여 그린 것이다.



근의 개수 세기. $\mathrm{f}(x) = 0$의 근은 그래프가 x축과 만나는 점이므로, 0을 극댓값 q 및 극솟값 $q - m$과 비교한다.

- $q > m$: 극솟값 $q - m$이 양수이므로 모든 곳에서 $\mathrm{f} > 0$이다. **근이 없다**.
- $q = m$: 그래프는 극소인 점에서만 축에 접한다. **근은 두 개**, $x = \pm a$이다.
- $0 < q < m$: 이제 $q - m < 0 < q$이다. 단조성(monotonicity)을 가지는 네 구간 $(-\infty, -a)$, $(-a, 0)$, $(0, a)$, (a, ∞) 각각에서 f는 연속(continuous)이고 강한 단조이며 양의 값에서 음의 값으로, 또는 그 반대로 변하므로, 각 구간에서 정확히 하나의 근을 가진다. **근은 네 개**이다.
- $q = 0$: $\mathrm{f}(x) = x^{220}(x^{1540} - 1)$이고, 이는 정확히 $x = 0$과 $x = \pm 1$에서 0이 된다. **근은 세 개**이다.
- $q < 0$: 극댓값 $\mathrm{f}(0) = q$가 음수이므로 $[-a, a]$ 전체에서 $\mathrm{f} < 0$이고, f는 (a, ∞)와 $(-\infty, -a)$ 각각에서 음의 값으로부터 $+\infty$까지 강한 단조로 변한다. **근은 두 개**이다.

따라서 서로 다른 근의 개수로 가능한 것은 0, 2, 3, 4이며, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &0\text{개의 근}: \quad q > m, \\ &2\text{개의 근}: \quad q < 0 \text{ 또는 } q = m, \\ &3\text{개의 근}: \quad q = 0, \\ &4\text{개의 근}: \quad 0 < q < m, \end{aligned} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

검산

(i)의 피적분함수에 심프슨(Simpson) 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.0281709를 얻으며, 이는 $\ln \frac{36}{35} = 0.0281709$와 일치한다. (ii)에서는 $x = 1$ 근처에서 $x^{1760} - x^{220}$의 최솟값을 수치적으로 촘촘히 탐색하면 $x \approx 0.99865$에서 -0.650123을 얻으며, 이는 $-m$ 및 a와 일치한다. $q = 1,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.001,\ 0,\ -0.01,\ -5$에 대하여 촘촘한 격자에서 f의 부호 변화를 세면 근의 개수는 $0, 4, 4, 4, 3, 2, 2$로, 위의 표가 예측한 대로이다. $q = 0$인 경우는 개형을 점검하기에 좋다. 그래프는 반드시 원점과 $(\pm 1, 0)$을 지나야 한다.

흔한 실수

- 경계에 해당하는 경우인 $q = 0$(극댓값이 축 위에 있으므로 근이 세 개)과 $q = m$(극소인 점에서 중근이 두 개)을 빠뜨린다.
- $-a$와 a 사이에서 아무 일도 일어나지 않는다는 것을 확인하지 않고 $q < 0$일 때 "대칭성에 의해" 근이 두 개라고 주장한다. 그 구간에서 추가적인 근을 배제해 주는 것은 바로 극댓값 q가 음수라는 사실이다.
- 완만하게 굽은 "W"를 그린다. 지수가 이렇게 크면 $|x| < 1$에서 그래프는 높이 q에서 거의 평평하다. 개형에서 골짜기를 과장하여 그리더라도 이 점을 언급해 둘 가치가 있다.

STEP 너머

극값의 위치를 찾아 근의 개수를 세는 방법은, 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 다루는 중간값 정리(intermediate value theorem)와 단조성 논증을 처음 맛보는 것이다. 치환 $u = x^{220}$은 또한 $n \to \infty$일 때 x^n이 어떻게 행동하는지, 즉 $(-1, 1)$에서 0으로 수렴하지만 균등수렴(uniform convergence)하지는 않는다는 것을 보여 준다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 연속성과 균등수렴을 모두 세심하고 읽기 쉽게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.