풀이

# STEP I 1990, 문제 4

순수수학 • 등차수열과 차분

> **STEP I 1990, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q4

## 핵심 아이디어

수열의 각 항은 첫째항에 차이들의 누적합을 더한 것이다. 등차수열(arithmetic progression)에서는 차이가 일정하므로 합을 구하기 쉽다. 이중 등차수열(double arithmetic progression)에서는 차이 자체가 등차수열을 이루므로 합하는 단계가 한 겹 더 늘어나고, 이항계수(binomial coefficient) $\binom{n}{2}$와 $\binom{n}{3}$이 자연스럽게 나타난다. 마지막 부분은 결국 두 미지의 차이에 대한 연립일차방정식이 된다.

## 풀이

### 등차수열

공차(common difference)를 $d = a_2 - a_1$이라 하면 $a_k = a_1 + (k-1)d$이다. 그러면

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}(a_2 - a_1),$$

이다. 여기서 $0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$을 이용하였다. $a_1$과 $a_2$에 대한 항끼리 묶으면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}[(3-n)a_1 + (n-1)a_2].$$

### 이중 등차수열

차이를 $\delta_k = b_{k+1} - b_k$라 하자. 이들은 첫째항이 $p = \delta_1 = b_2 - b_1$이고 공차가

$$e = \delta_2 - \delta_1 = (b_3 - b_2) - (b_2 - b_1) = b_3 - 2b_2 + b_1.$$

인 등차수열을 이룬다. 따라서 $\delta_j = p + (j-1)e$이고, 처음 $k-1$개의 차이를 더하면(첫 번째 부분의 공식에서 $n$을 $k-1$로 바꾼 것) 다음을 얻는다.

$$b_k = b_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j = b_1 + (k-1)p + \frac{(k-1)(k-2)}{2}\, e = b_1 + \binom{k-1}{1} p + \binom{k-1}{2} e.$$

이제 $k = 1, \ldots, n$에 대하여 합한다. 두 개의 합이 필요하다. 첫 번째는 앞에서와 같이 $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \binom{n}{2}$이다. 두 번째는 $j = k-1$이 0부터 $n-1$까지 움직인다고 하면

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{12}[(2n-1)-3]$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \binom{n}{3}.$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = nb_1 + \binom{n}{2}(b_2 - b_1) + \binom{n}{3}(b_3 - 2b_2 + b_1).$$

이것은 이미 $n$, $b_1$, $b_2$, $b_3$에 대한 공식이다. 각 $b_i$의 계수를 따로 보고 싶다면 전개하여 다음을 얻는다.

$$b_1 + \cdots + b_n = \frac{n(n^2 - 6n + 11)}{6}\, b_1 + \frac{n(n-1)(7-2n)}{6}\, b_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\, b_3.$$

(간단한 확인: $n = 1, 2, 3$을 넣으면 각각 $b_1$, $b_1 + b_2$, $b_1 + b_2 + b_3$이 나온다.)

**생각해 보기** $\binom{n}{3}$이 어디에서 나오는지 더 깔끔하게 볼 수 있는 방법이 있을까?

있다. $\binom{k-1}{2}$는 $k-1$개에서 2개를 고르는 방법의 수이고, 하키스틱 항등식(hockey-stick identity) $\sum_{k=1}^{n}\binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}$($n$개에서 3개를 고를 때 가장 큰 것 $k$를 먼저 정한다)을 쓰면 합을 한 번에 구할 수 있다. 적분하면 거듭제곱의 차수가 하나 올라가는 것과 마찬가지로, "차이의 차이"를 한 겹 더할 때마다 이항계수가 하나씩 올라간다.

### 계승 수열

이제 $b_1 = 1$이고, $p$와 $e$를 위와 같이 두면 $b_k = 1 + (k-1)p + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)e$이다. 따라서

$$b_2 = 1 + p, \qquad b_4 = 1 + 3p + 3e, \qquad b_6 = 1 + 5p + 10e.$$

$c_1 = b_2$, $c_2 = b_4$, $c_3 = b_6$, $c_4 = 220$인 계승 수열(factorial progression)에서 연속한 차이는 $1!\,d$, $2!\,d$, $3!\,d$, 즉 $d$, $2d$, $6d$이다.

$$b_4 - b_2 = 2p + 3e = d,$$
$$b_6 - b_4 = 2p + 7e = 2d,$$
$$220 - b_6 = 219 - 5p - 10e = 6d.$$

첫 번째 식을 두 번째 식에 대입하면 $2p+7e=4p+6e$이므로 $e=2p$이고, 따라서 $d=8p$이다. 세 번째 식은

$$219-5p-20p=48p \quad\Longrightarrow\quad 73p=219 \quad\Longrightarrow\quad p=3,$$

이 되므로 $e=6$, $d=24$이고, 이는 조건대로 o이 아니다. 모든 단계가 필연적으로 결정되었으므로 해는 유일하다.

그러므로 $b_k = 1+3(k-1)+3(k-1)(k-2) = 3k^2-6k+4$이고, 수열은 $1,4,13,28,49,76,\ldots$이다. 실제로 $b_2, b_4, b_6, 220 = 4, 28, 76, 220$의 차이는 $24, 48, 144 = 1!\cdot 24,\ 2!\cdot 24,\ 3!\cdot 24$이다.

마지막으로 $b_1=1$, $b_2-b_1=3$, $b_3-2b_2+b_1=6$을 합 공식에 넣으면

$$\begin{aligned} 1+b_2+\cdots+b_n &= n+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}+6\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ &= \frac{n}{2}[2+3(n-1)+2(n-1)(n-2)] \\ &= \frac{n(2n^2-3n+3)}{2}. \end{aligned}$$

## 검산

$n=1,2,3$일 때 최종 공식은 $1, 5, 18$을 주며, 이는 $1, 1+4, 1+4+13$과 일치한다. $n=6$일 때는 $3\cdot 57 = 171$이고, 직접 계산해도 $1+4+13+28+49+76=171$이다. 또한 컴퓨터로 수백 개의 무작위 수열과 $n\le 24$인 모든 $n$에 대하여 두 일반 합 공식을 (분수를 사용해) 정확하게 확인하였다.

## 흔한 실수

- 계승 수열의 차이를 $d, 2d, 3d$로 잡는 것: 차이는 $1!\,d, 2!\,d, 3!\,d$이므로 세 번째 차이는 $6d$이다.
- $b_k = b_1 + kp + \ldots$로 쓰는 것: $b_1$과 $b_k$ 사이에는 차이가 $k-1$개뿐이다.

## STEP 너머

이것은 유한차분법(calculus of finite differences)이다. $m$계 차분이 일정한 수열은 $n$에 대한 $m$차 다항식이고, 그 부분합은 $m+1$차 다항식이며, 이는 기저 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$로 나타내는 것이 가장 좋다(뉴턴(Newton)의 전진차분 공식). $\binom{n}{r}$을 합하여 $\binom{n+1}{r+1}$을 얻는 것은 $\int x^r\,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1}$의 이산적 쌍둥이이다. 이런 흐름의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 실린 문제들을 시도해 보자.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.