풀이

STEP I 1990, 문제 3

순수수학 • 법선과 평행 곡선

> **STEP I 1990, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q3

핵심 아이디어

아래쪽을 향하는 단위 법선벡터(unit normal)를 명시적으로 적어 $\mathbf{s}$의 좌표를 x로 나타내기만 하면 나머지는 모두 저절로 따라온다. 그러면 소문항 (i)은 $\mathbf{s}$의 y좌표가 0이 되도록 만드는 문제가 된다. 소문항 (ii)에서는 제시된 치환(substitution)을 쓰면 $\mathbf{s}$의 좌표가 아주 간단해지고, 기울기 조건은 1계 미분방정식(first-order differential equation)이 되는데, 이 식은 알고 보면 어떤 식의 도함수 그 자체이다.

풀이

준비. $y = \mathrm{f}(x)$의 접선(tangent) 방향은 $(1, \mathrm{f}'(x))$이므로 법선 방향은 $\pm(\mathrm{f}'(x), -1)$이다. 아래쪽을 향하는 것은 y성분이 음수인 쪽이므로

$$\mathbf{n} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \mathrm{f}'(x) \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad N = \sqrt{1 + \mathrm{f}'(x)^2},$$

이고, 따라서

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} + \mathrm{p}(x)\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x + \dfrac{\mathrm{p}(x)\,\mathrm{f}'(x)}{N} \\ \mathrm{f}(x) - \dfrac{\mathrm{p}(x)}{N} \end{pmatrix}.$$

이다. 또한 $\mathbf{n}$이 단위벡터이므로 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}| = |\mathrm{p}(x)|$임에 주목하자.

소문항 (i)

여기서는 $\mathrm{f}(x) = x^k$, $\mathrm{f}'(x) = kx^{k-1}$, $N = \sqrt{1 + k^2x^{2k-2}}$이다. $\mathbf{s}$가 x축 위에 있으려면 y좌표가 0이어야 한다.

$$x^k - \frac{\mathrm{p}(x)}{N} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(x) = x^k\sqrt{1 + k^2x^{2k-2}}.$$

이렇게 잡으면 $\mathbf{s}$의 x좌표는

$$x + x^k \cdot kx^{k-1} = x + kx^{2k-1},$$

이고, 이는 연속이고 증가하며, $x \to 0^+$일 때 0으로, $x \to \infty$일 때 무한대로 간다. 따라서 $\mathbf{s}$는 양의 x축의 일부가 아니라 전체를 실제로 훑고 지나간다.

이제 $|\mathbf{r}|^2 = x^2 + x^{2k}$이고 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = \mathrm{p}(x)^2 = x^{2k} + k^2x^{4k-2}$이다(여기서 $\mathrm{p} > 0$). 따라서 모든 $x > 0$에 대하여 $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$일 필요충분조건은

$$x^2 = k^2x^{4k-2} \quad \text{모든} x > 0.$$

에 대하여 성립하는 것이다. $x = 1$을 대입하면 $k^2 = 1$이어야 하므로 $k = 1$이다. 역으로 $k = 1$이면 양변이 모두 x^2이 된다. 따라서 $k = 1$이다.

기하학적으로 보면, 직선 $y = x$ 위의 점 (x, x)에서 아래쪽으로 그은 법선은 x축과 $(2x, 0)$에서 만나고, 세 꼭짓점이 O, (x, x), $(2x, 0)$인 삼각형은 같은 두 변의 길이가 $\sqrt{2}\,x$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이다.

소문항 (ii)

이제 $\mathrm{f}(x) = x^2$, $\mathrm{f}'(x) = 2x$, $N = \sqrt{1 + 4x^2}$이다. $\mathrm{p} = \mathrm{q}N$으로 놓으면 번거로운 제곱근이 소거된다.

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2x\,\mathrm{q}(x) \\ x^2 - \mathrm{q}(x) \end{pmatrix}.$$

새 곡선은 x를 매개변수(parameter)로 하여 주어지므로, $\mathbf{s}$에서의 기울기는

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{2x - \mathrm{q}'}{1 + 2\mathrm{q} + 2x\mathrm{q}'}.$$

이다. 이것을 $\mathbf{r}$에서 $y = x^2$의 기울기인 $2x$와 같다고 놓고 분모를 곱하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & 2x - \mathrm{q}' = 2x + 4x\mathrm{q} + 4x^2\mathrm{q}' \\ \Longleftrightarrow \quad & (1 + 4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q} = 0. \end{aligned}$$

생각해 보기 (0이 되는 곳이 있을 수도 있는) q로 나누지 않고 이 식을 풀 수 있을까?

그렇다. 대신 결코 0이 되지 않는 $N = \sqrt{1+4x^2}$으로 나누면 된다. $N' = 4x/N$이므로

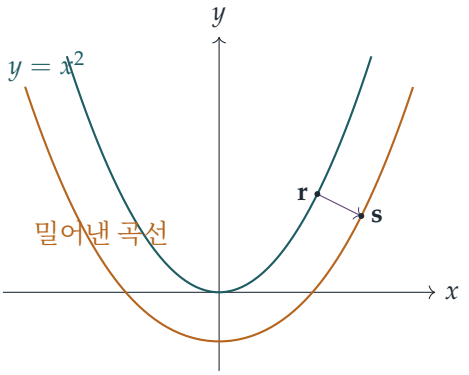
$$\frac{(1+4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q}}{N} = N\mathrm{q}' + \frac{4x}{N}\,\mathrm{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N\mathrm{q}) = \mathrm{p}'(x).$$

이다. 따라서 조건은 단순히 모든 x에 대하여 $\mathrm{p}'(x) = 0$이라는 것이고, 그러므로

$$\mathrm{p}(x) = c, \qquad \text{상수}$$

이다(동치로 $\mathrm{q}(x) = c/\sqrt{1+4x^2}$). 역으로, 새 곡선의 기울기가 정의되는 곳에서는 위의 각 단계를 거꾸로 따라갈 수 있으므로 모든 상수 c가 조건을 만족한다.

새 곡선은 **평행곡선**(parallel curve)이다. 즉 포물선의 각 점을 법선을 따라 일정한 거리 c만큼 밀어낸 것이다. 그림은 $c = \frac{1}{2}$인 경우이다.



미묘한 점이 하나 있다. $\mathrm{d}X/\mathrm{d}x = 1 + 2\mathrm{q} + 2x\mathrm{q}'$인데, $\mathrm{q} = c/N$을 대입하면 $1 + 2c/N^3$으로 간단해진다. $c > -\frac{1}{2}$이면 이 값은 항상 양수이므로 밀어낸 곡선은 매끄러운 곡선이다. $c \le -\frac{1}{2}$이면(꼭짓점에서의 곡률 반지름(radius of curvature)인 $\frac{1}{2}$ 이상만큼 **위쪽으로** 밀어내는 경우), 이 값은 $N^3 = -2c$인 곳에서 0이 되고, 밀어낸 곡선은 그곳에서 첨점(cusp)을 갖게 된다.

검산

- (i)에서 $k = 2$, $x = 1$이면 $\mathrm{p}(1) = \sqrt{5}$이고 $\mathbf{s} = (1,1) + \sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = (3,0)$이므로 요구대로 x축 위에 있다. 그러나 $|\mathbf{r}| = \sqrt{2} \neq \sqrt{5}$이므로 $k = 2$는 조건을 만족하지 않는다.
- (ii)에서 상수 c로 밀어낸 곡선은 $x = 0$일 때 $(0,-c)$를 지나고, 대칭성에 의해 그곳에서의 기울기는 0이므로 포물선의 꼭짓점과 들어맞는다.

- 수치적으로 $c = 1$, $x = 0.8$일 때 밀어낸 곡선의 유한 차분(finite difference) 기울기는 $2x = 1.6$과 일치한다. 반면 상수가 아닌 $\mathrm{p} = x^2$을 택하면 기울기는 약 0.41이 나온다.

흔한 실수

- 위쪽을 향하는 법선 $(-\mathrm{f}', 1)/N$을 쓰는 실수: 이 경우 $\mathbf{s}$의 부호가 모두 뒤집힌다.
- 새 곡선의 기울기를 $(\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x)/(\mathrm{d}X/\mathrm{d}x)$가 아니라 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x$로 쓰는 실수: 새 곡선의 x좌표는 x가 아니라 X이다.
- (i)에서 지수만 비교하여 $(4k - 2 = 2)$ $k = 1$이라고 결론짓고, 계수 조건 $k^2 = 1$은 확인하지 않는 실수.

STEP 너머

일정한 거리만큼 밀어낸 곡선을 **평행곡선** 또는 **오프셋 곡선**(offset curve)이라고 하며, 실제로도 중요하다. 밀링 머신(milling machine)의 절삭 공구 중심은 깎아 내는 모양의 평행곡선을 따라 움직인다. 밀어내는 거리가 곡률 반지름보다 클 때 나타나는 첨점들은 곡률 중심의 자취인 **축폐선**(evolute) 위에 놓이는데, 이는 곡선의 미분기하학(differential geometry)에서 핵심적인 대상이다. 좋은 입문서로 Pressley, *Elementary Differential Geometry*(초등 미분기하학)가 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.