풀이

STEP I 1990, 문제 2

순수수학 • 1의 거듭제곱근 필터

> **STEP I 1990, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.2 절 **단위근 필터**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/roots-filter.html

핵심 아이디어

1의 세제곱근(cube roots of unity)은 일종의 거름망 역할을 한다. $(1+\omega^r)^n$을 이항정리(binomial theorem)로 전개하고 $r=1,2,3$일 때의 결과를 더하면, 각 이항계수(binomial coefficient) $\binom{n}{j}$에 $1+\omega^j+\omega^{2j}$가 곱해진다. 이 값은 j가 3으로 나누어떨어지면 3이고 그렇지 않으면 0이다. 따라서 이 합에는 정확히 우리가 원하는 계수만 남는다. 각 $(1+\omega^r)^n$을 계산하는 또 다른 방법은 $1+\omega^r$을 절댓값-편각 형식(modulus–argument form)으로 나타낸 뒤 드무아브르(de Moivre) 정리를 이용하는 것이다.

풀이

1의 세제곱근

$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$이므로 $\omega^3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$이지만 $\omega \neq 1$이다. 그러면

$$0 = \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2),$$

이고 $\omega - 1 \neq 0$이므로 양변을 이것으로 나누면 $1+\omega+\omega^2 = 0$을 얻는다.

따라서 $1+\omega^2 = -\omega$이다. $-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$을 곱하는 것은 $-\pi$만큼 회전하는 것이므로

$$1 + \omega^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}.$$

그러므로 $1+\omega^2$의 절댓값은 1이고 편각은 $-\frac{\pi}{3}$이다. (검산해 보면 $1+\omega^2 = 1+$

$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$이다.) 같은 방법으로 $1 + \omega = -\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이고, 이는 켤레 복소수(complex conjugate)이다.

항등식

첫 번째 방법: 이항정리. $r = 1, 2, 3$에 대하여

$$(1 + \omega^r)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{rj}.$$

세 경우를 더하면

$$(1 + \omega)^n + (1 + \omega^2)^n + (1 + \omega^3)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\omega^j + \omega^{2j} + \omega^{3j}\right).$$

생각해 보기 일반적인 정수 j에 대하여 $\omega^j + \omega^{2j} + \omega^{3j}$의 값은 무엇인가?

$\omega^{3j} = 1$이므로 괄호 안은 $1 + \omega^j + \omega^{2j}$이고, $\omega^3 = 1$이므로 이 값은 j를 3으로 나눈 나머지에만 의존한다.

- j가 3의 배수이면 $\omega^j = 1$이고 괄호 안은 $1 + 1 + 1 = 3$이다.
- $j \equiv 1 \pmod 3$이면 $\omega^j = \omega, \omega^{2j} = \omega^2$이므로 괄호 안은 $1 + \omega + \omega^2 = 0$이다.
- $j \equiv 2 \pmod 3$이면 $\omega^j = \omega^2, \omega^{2j} = \omega^4 = \omega$이므로 이번에도 괄호 안은 0이다.

따라서 $3 \mid j$인 항만 살아남고

$$(1 + \omega)^n + (1 + \omega^2)^n + (1 + \omega^3)^n = 3\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{k}\right],$$

이다. 여기서 k는 n 이하인 3의 배수 중 가장 큰 수이다.

두 번째 방법: 절댓값과 편각. 앞부분에서 $1 + \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, 1 + \omega^2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$이고, $1 + \omega^3 = 2$이다. 드무아브르 정리에 의하여

$$\begin{aligned}(1 + \omega)^n + (1 + \omega^2)^n + (1 + \omega^3)^n &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/3} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi/3} + 2^n \\ &= 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

두 계산 결과를 비교하고 3으로 나누면

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots + \binom{n}{k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

$n = 25$인 경우

25를 넘지 않는 가장 큰 3의 배수는 24이므로, 첫 번째 합은 정확히 $n = 25$일 때의 항등식이다. 이제 $\frac{25\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3}$이므로 $\cos\frac{25\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$이고

$$\binom{25}{0} + \binom{25}{3} + \cdots + \binom{25}{24} = \frac{1}{3}\left(2^{25} + 1\right) = \frac{33554433}{3} = 11184811.$$

두 번째 합

여기서는 $n = 24$이고 $j \equiv 2 \pmod 3$인 계수 $\binom{24}{j}$의 합을 구하려 한다. 모든 계수 $\binom{24}{j}$를 j를 3으로 나눈 나머지에 따라 묶으면

$$S_0 + S_1 + S_2 = \sum_{j=0}^{24} \binom{24}{j} = 2^{24},$$

이다. 여기서 S_m은 $j \equiv m \pmod 3$인 j에 대한 $\binom{24}{j}$의 합이다.

대칭성 $\binom{24}{j} = \binom{24}{24-j}$로 이들을 짝지을 수 있다. 24가 3의 배수이므로 $j \equiv 2$이면 $24 - j \equiv -2 \equiv 1 \pmod 3$이다. 따라서 $j \mapsto 24 - j$는 S_2의 항과 S_1의 항을 일대일로 대응시키고, $S_1 = S_2$이다.

$n = 24$일 때의 항등식으로 S_0를 구할 수 있다. $\cos 8\pi = 1$이므로

$$S_0 = \frac{1}{3}\left(2^{24} + 2\right).$$

그러므로

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(2^{24} - S_0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2^{24} - 2}{3} = \frac{2^{24} - 1}{3}.$$

주어진 값을 반으로 나누면 $2^{24} = 16777216$이므로

$$\binom{24}{2} + \binom{24}{5} + \cdots + \binom{24}{23} = \frac{16777215}{3} = 5592405.$$

검산

- 작은 경우: $n = 3$이면 좌변은 $1 + 1 = 2$이고 우변은 $\frac{1}{3}(8 + 2\cos\pi) = 2$이다. $n = 4$이면 좌변은 $1 + 4 = 5$이고 우변은 $\frac{1}{3}\left(16 + 2\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}(16 - 1) = 5$이다.
- 나누어떨어짐: $2^{25} + 1$과 $2^{24} - 1$은 모두 3의 배수여야 하는데, $2 \equiv -1 \pmod 3$이므로 실제로 그렇다.
- 컴퓨터로 이항계수를 직접 더해 보았다. 항등식은 199 이하의 모든 n에 대하여 성립하고, 첫 번째 합은 11184811, 두 번째 합은 5592405이다.

흔한 실수

- $1+\omega^2$의 편각을 $\frac{\pi}{3}$으로 쓰는 것. 이 수는 제4사분면에 있으므로 주편각(principal argument)은 $-\frac{\pi}{3}$이다(또는 같은 뜻으로 $\frac{5\pi}{3}$).
- 2^n을 만들어 내는 $r=3$인 경우를 빠뜨리는 것.
- 두 번째 합에서 공식을 그대로 쓰려고 하는 것. 이 공식은 3의 배수인 경우만 다루므로, 나머지가 2인 항에는 다른 아이디어(여기서는 대칭성)가 필요하다.

STEP 너머

이 기법을 **단위근 필터**(roots of unity filter)라고 하며, 이는 이산 푸리에 변환(discrete Fourier transform)의 첫 번째 예이다. m제곱근인 1의 거듭제곱근들에 대하여 $f(\omega^r)$의 평균을 내면, 다항식 f의 계수 중 m을 법으로 하는 특정한 잉여류(residue class)에 속하는 것만 골라낼 수 있다. 대칭들의 군에 대하여 이와 같이 평균을 내는 방법은 유한군(finite group)의 지표 이론(character theory)과 번사이드(Burnside) 보조정리 같은 세기 논법에서 다시 등장한다. 복소수가 왜 이런 계산을 자연스럽게 만드는지 더 알고 싶다면 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.