풀이

STEP I 1990, 문제 13

역학 • 마찰과 강체의 평형

STEP I 1990, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

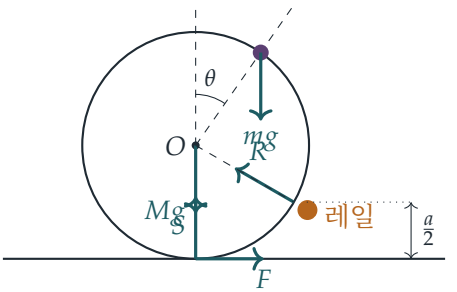
step.maths.org/questions/90-s1-q13

핵심 아이디어

먼저 입자(particle)를 다룬다. 이 입자는 거친 빗면 위에 놓인 평범한 입자이고, 그 빗면은 접촉점에서 원기둥(cylinder)에 접하는 접평면(tangent plane)이다. 다음으로, 입자가 평형(equilibrium) 상태에 있으므로 입자가 원기둥에 작용하는 힘 전체는 단순히 입자의 무게이며, 접촉점을 지나 연직 아래로 작용한다는 점에 주목한다. 원기둥의 중심에 대한 모멘트(moment)를 잡으면 이 힘과 평면이 주는 마찰력(friction)을 제외한 모든 힘이 사라지므로, 이것이 가장 빠른 길이다.

풀이

입자를 질량 m인 질점(point mass)으로, 원기둥을 질량 M이고 질량중심(centre of mass) O가 축 위에 있는 균일한 강체(rigid body) 원기둥으로 모형화한다. 레일은 매끄러우므로 수직항력만 작용하고, 평면과 원기둥의 표면은 마찰계수(coefficient of friction) μ로 거칠다. 모든 일은 O를 지나는 연직 단면 안에서 일어나므로, 이제부터 이 단면을 사용한다. 레일을 오른쪽에 둔다.



그림은 원기둥에 작용하는 힘들을 나타낸다(입자 위치의 mg는 두 번째 부분에서 설명한다). 화살표의 길이는 실제 비율이 아니다.

입자의 평형

접촉점 P에서 바깥쪽 법선은 연직 위쪽 방향과 각 θ를 이루므로, 그곳의 접평면은 수평면과 θ만큼 기울어진 빗면이다. 입자에 작용하는 힘은 무게 mg, 바깥쪽 법선 방향의 수직항력(normal reaction) N, 그리고 접선 방향으로 빗면 위쪽을 향하는 마찰력 f이다. 법선 방향과 그에 수직인 방향으로 분해하면

$$N = mg\cos\theta, \qquad f = mg\sin\theta.$$

$f \le \mu N$이면 마찰력이 이만큼을 공급할 수 있다. 즉,

$$\tan\theta \le \mu, \qquad \text{동치로} \qquad \theta \le \arctan\mu.$$

(N이 양수이려면 $0 \le \theta < 90^\circ$이어야 하는데, 입자가 원기둥 윗부분에 있으므로 이는 성립한다.)

놓은 뒤 원기둥의 평형

> **생각해 보기** 입자는 수직항력과 마찰력으로 원기둥을 누른다. 이 두 힘을 따로따로 다루어야 할까?

그럴 필요 없다. 뉴턴의 제3법칙(Newton's third law)에 따라 원기둥은 P에서 $-N$과 $-f$를 받는다. N과 f를 합하면 입자의 무게와 평형을 이루므로 그 합은 연직 위쪽으로 mg이고, 따라서 입자가 원기둥에 작용하는 힘 전체는 **P에서 연직 아래로 작용하는** mg이다. 이 힘의 작용선(line of action)은 레일 쪽으로 O에서 수평 거리 $a\sin\theta$만큼 떨어져 있다.

원기둥에 작용하는 나머지 힘은 다음과 같다.

- O에 작용하는 무게 Mg;
- 레일의 반작용 R. 이 힘은 원기둥 표면에 수직이므로 반지름을 따라 O를 향한다. 레일은 높이 $a/2$, 즉 O보다 $a/2$ 아래에서 닿으므로, 이 반지름은 연직 아래 방향과 60°를 이룬다. 따라서 R은 레일에서 멀어지는 방향으로 수평 성분 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$, 위쪽으로 성분 $\frac{1}{2}R$를 가진다;
- 가장 낮은 점에서 위쪽으로 작용하는 수직항력 S와 수평으로 작용하는 마찰력 F(레일 쪽을 양의 방향으로 잡는다).

O에 대한 모멘트. Mg, R, S의 작용선은 모두 O를 지난다. 입자의 mg는 모멘트 $mg\,a\sin\theta$를 가지며(원기둥을 레일 쪽으로 돌리려 한다), F는 O보다 거리 a 아래에서 반대 방향으로 작

용한다. 따라서

$$Fa = mg\,a\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad F = mg\sin\theta.$$

이 값은 양수이므로, 그림처럼 마찰력은 실제로 레일 쪽으로 작용한다. (레일이 없다면 원기둥은 레일이 있는 쪽으로 굴러갈 것이다. 레일이 쓸모 있으려면 입자가 그쪽에 있어야 하는 이유가 바로 이것이다.)

수평 방향으로 분해하면: $\frac{\sqrt{3}}{2}R = F$이므로

$$R = \frac{2mg\sin\theta}{\sqrt{3}} > 0,$$

이는 레일이 밀기만 할 수 있다는 사실과 모순되지 않는다.

연직 방향으로 분해하면:

$$S = (M+m)g - \tfrac{1}{2}R = (M+m)g - \frac{mg\sin\theta}{\sqrt{3}},$$

$\sin\theta < 1 < \sqrt{3}$이고 $M > 0$이므로 이 값은 양수이고, 따라서 원기둥은 평면 위에 머문다.

$F \le \mu S$이면 평면이 마찰력을 공급할 수 있다.

$$m\sin\theta \le \mu\left[(M+m) - \frac{m\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] \iff m\sin\theta\left(\sqrt{3}+\mu\right) \le \sqrt{3}\,\mu\,(M+m).$$

그러므로 놓은 뒤에 두 물체가 모두 평형을 유지할 수 있는 조건은 $\tan\theta \le \mu$와

$$\boxed{\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\,\mu\,(M+m)}{m\,(\sqrt{3}+\mu)}}$$

가 모두 성립하는 것이다. (매끄러운 레일에서는 마찰력이 필요 없고, 입자와 원기둥 사이의 마찰력은 첫 번째 부분에서 다루었다.)

마지막 부분

$m = 7M$, $\mu = \frac{3}{4}$일 때 입자의 조건은 $\tan\theta \le \frac{3}{4}$, 즉 $\sin\theta \le \frac{3}{5}$이다. 원기둥의 조건은

$$\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 8M}{7M\,(\sqrt{3}+\frac{3}{4})} = \frac{24\sqrt{3}}{7(4\sqrt{3}+3)} = \frac{24\sqrt{3}\,(4\sqrt{3}-3)}{7\cdot 39} = \frac{24(4-\sqrt{3})}{91}.$$

어느 쪽이 더 엄격할까? 다음이 성립한다.

$$\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} < \frac{3}{5} \iff 120(4-\sqrt{3}) < 273 \iff 207 < 120\sqrt{3} \iff 42849 < 43200,$$

이는 참이다. 따라서 원기둥이 평면 위에서 미끄러지는 것이 실제로 제약이 되는 조건이며(아주 근소한 차이로), 평형을 이루는 θ의 최댓값은

$$\theta_{\max} = \arcsin\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} \approx 36.7^\circ,$$

으로, $\arctan\frac{3}{4} \approx 36.9^\circ$보다 약간 작다.

검산

- 극한의 경우 $M \to \infty$: 아주 무거운 원기둥은 언제나 마찰력으로 붙잡아 둘 수 있으므로 원기둥의 조건은 아무 제약도 주지 않게 되고, $\tan\theta \le \mu$만 남는다.
- $\theta \to 0$이면 입자는 꼭대기에 놓이고 그 무게는 O를 지나며, $F = R = 0$이다. 예상대로 레일도 마찰력도 필요 없다.
- 수치적으로, M, m, a, μ, θ를 무작위로 20 000번 골라 힘 벡터로부터 직접 세 평형 방정식을 풀어 보면 매번 상자 안의 조건과 일치한다. $m = 7M$, $\mu = 0.75$일 때 θ를 촘촘히 훑으면 $\theta_{\max} \approx 36.737^\circ$, $\sin\theta_{\max} \approx 0.59814$를 얻는다.

흔한 실수

- 레일의 힘을 수평으로 잡는 것. 이 힘은 원기둥 표면에 수직이므로 반지름 방향을 향하며, 여기서는 수평면 위로 30°를 이룬다.
- 레일의 힘의 위쪽 성분 $\frac{1}{2}R$를 빠뜨리는 것. 이 성분은 S를 줄이고, 따라서 평면이 줄 수 있는 마찰력도 줄인다.
- 원기둥의 조건과 비교하지 않고 $\theta = \arctan\frac{3}{4}$에서 멈추는 것. 원기둥의 조건이 (근소하게) 더 엄격하다.

STEP 너머

여기서 쓴 유용한 기법, 즉 입자의 접촉력들을 입자의 무게와 같은 하나의 합력(resultant)으로 바꾸는 것은, 강체에 작용하는 임의의 힘의 계가 선택한 한 점을 지나는 하나의 힘과 하나의 짝힘(couple)으로 환원된다는 생각을 처음 엿보게 해 준다. 마찰이 있는 접촉이 여러 개인 강체의 정역학(statics)은 대학 1학년의 표준 주제이며, 어느 접촉이 먼저 미끄러지는가 하는 질문은 마찰력이 방정식만으로는 결정되지 않는 더 미묘한 문제로 이어진다. Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 힘, 토크(torque), 강체의 평형을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.