풀이

STEP I 1990, 문제 12

역학 • 탄성 용수철과 에너지

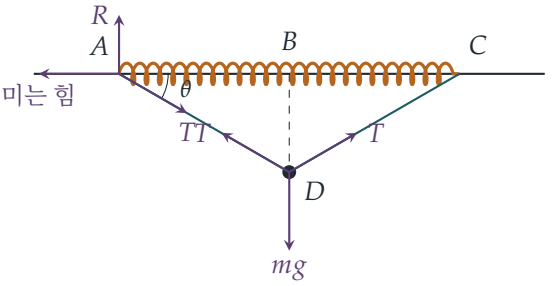
> **STEP I 1990, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q12

핵심 아이디어

입자를 제외한 모든 것이 가벼우므로(light, 질량을 무시할 수 있음), 양 끝 A와 C에 작용하는 힘은 정확히 평형을 이루어야 한다. 즉 각 끝에서 줄이 수평으로 당기는 힘은 압축된 용수철이 미는 힘과 같다. 이로부터 평형(equilibrium) 조건을 얻는다. 운동에 대해서는 에너지가 자연스러운 도구이다. 운동 에너지(kinetic energy)는 입자의 것뿐이므로, 입자는 위치 에너지(potential energy)가 처음 값으로 돌아올 때 정확히 정지한다.

풀이

모형. 용수철과 줄은 가볍고, 줄은 늘어나지 않으며(inextensible), 막대는 매끄러우므로(smooth) 막대는 용수철을 수직 방향으로만 밀 수 있다. B를 지나는 연직선에 대한 대칭(symmetry)에 의해 입자 D는 항상 B의 바로 아래에 있고, $AD = DC = l$이다. 줄의 각 절반에 걸리는 장력(tension)을 T, 각 절반이 막대와 이루는 각을 θ라 하자.



평형

$\theta = \pi/6$이면 AC의 절반의 길이는 $l\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$이므로

$$AC = \sqrt{3}\,l < 2l,$$

이고, 용수철은 $(2-\sqrt{3})l$만큼 **압축**(compressed)되어 있다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 용수철은 A를 (그리고 C를) 바깥쪽으로 다음 크기의 힘(thrust)으로 민다.

$$\frac{\lambda(2-\sqrt{3})l}{2l} = \lambda\Big(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

D에서 연직 방향으로 분해하면: $2T\sin\frac{\pi}{6} = mg$이므로 $T = mg$이다.

A에서 수평 방향으로 분해하면:

> **생각해 보기** 그곳에는 아무것도 없는데, 왜 A에서 힘의 평형을 따질 수 있을까?

용수철의 끝은 가벼운 점이다. 질량이 0인 물체에 알짜힘이 작용하면 가속도가 무한대가 되므로, 그 점에 작용하는 힘은 (평형 상태에서뿐만 아니라) 매 순간 평형을 이루어야 한다. 막대는 매끄러우므로 그 수직항력 R는 연직 방향이고, 수평 방향으로는 줄과 용수철만 작용한다.

$$T\cos\frac{\pi}{6} = \lambda\Big(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad\Longrightarrow\quad mg\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

따라서

$$mg = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \lambda\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\Big),$$

이며, 이것이 보이려던 식이다.

위치 에너지

$AC = 2xl$이라 하자. 줄이 팽팽한 동안 $0 < x \le 1$이다. AC의 절반은 xl이고 $AD = l$이므로, 피타고라스 정리(Pythagoras)에 의해 D는 막대 아래로

$$BD = l\sqrt{1-x^2}$$

의 깊이에 있다. 용수철의 늘어난 길이는 $2xl - 2l$이므로 탄성 에너지(elastic energy)는 $\frac{\lambda(2l-2xl)^2}{2\cdot 2l} = \lambda l(1-x)^2$이다. 막대를 중력 위치 에너지의 기준(0) 높이로 잡으면

$$V(x) = \lambda l(1-x)^2 - mgl\sqrt{1-x^2}.$$

일관성을 확인해 보자.

$$V'(x) = -2\lambda l(1-x) + \frac{mglx}{\sqrt{1-x^2}},$$

이고, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$에서($\cos\theta = x$이므로 $\theta = \frac{\pi}{6}$) 이 값은 $mg\sqrt{3} = \lambda(2-\sqrt{3})$일 때 정확히 0이 되는데, 이는 위에서 구한 조건과 같다.

B에서의 낙하

처음에 입자는 B에 있으므로 줄은 막대를 따라 놓여 있고, $AC = 2l$, $x = 1$이다. 이때 $V(1) = 0$이고 계는 정지 상태에서 출발한다.

막대는 매끄럽고 줄은 늘어나지 않으므로 에너지 손실이 없다. 또 용수철과 줄은 가벼우므로 운동 에너지는 입자의 $\frac{1}{2}mv^2$뿐이다. 따라서 운동하는 동안 항상

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V(x) = V(1) = 0.$$

생각해 보기 왜 "정지한다"는 것이 $V'(x) = 0$이 아니라 $V(x) = 0$을 뜻할까?

입자는 $v = 0$일 때 정지하며, 에너지 보존에 의해 이는 $V(x) = 0$을 뜻한다. 조건 $V'(x) = 0$은 평형을 나타내는데, 그곳은 입자가 멈추는 곳이 아니라 **가장 빠르게** 움직이는 곳이다. 따라서 x는 다음을 만족한다.

$$\lambda(1-x)^2 = mg\sqrt{1-x^2}, \qquad \text{즉,} \qquad (1-x)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\sqrt{1-x^2}.$$

근 $x = 1$은 출발 위치이다. $x < 1$이면 $\sqrt{1-x} > 0$으로 나누고 제곱할 수 있으며, 그러면 더 깔끔한 3차 방정식(cubic)을 얻는다.

$$(1-x)^3 = k^2(1+x), \qquad k = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0.15470, \quad k^2 \approx 0.023932.$$

$(1-x)^{3/2} = k\sqrt{1+x}$의 양변이 모두 양수이므로 여기서 제곱해도 문제가 없다. $f(x) = (1-x)^3 - k^2(1+x)$라 하자. 그러면

$$f(0.65) = 0.042875 - 0.039488 \approx +0.0034,$$
$$f(0.66) = 0.039304 - 0.039727 \approx -0.0004,$$

이므로 0.65와 0.66 사이, 0.66에 매우 가까운 곳에 근이 있다. $f'(x) = -3(1-x)^2 - k^2 < 0$이므로 f는 순감소(strictly decreasing)하고, 따라서 이것이 $x < 1$인 유일한 근이다. 입자는 $x \approx 0.66$(더 정확히는 $x \approx 0.6589$)일 때 다음으로 정지하며, 이때 D는 막대 아래 약 $0.75l$의 깊이에 있다.

검산

- $\theta = \pi/6$에서 $\lambda = l = m = 1$, $g = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$로 두면 A에서의 수평 당김과 용수철의 미는 힘은 모두 0.13397이고, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$에서 V의 수치 미분값은 0이다($V'' > 0$이므로 이 평형은 안정(stable)하다).
- 이분법(bisection)으로 근 $x = 0.658861$을 얻으며, D의 깊이 y에 대한 운동 방정식(equation of motion) $m\ddot{y} = mg - 2\lambda(1-x)\,y/(lx)$를 $y = 0$의 정지 상태에서부

터 (RK4로) 단계적으로 풀면 입자가 처음 멈추는 곳이 $x = 0.658861$로 나와 결과가 일치한다.

- 평형값 $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$은 당연히 0.66과 1 사이에 있다. 입자는 평형 위치를 중심으로 진동(oscillates)하기 때문이다.

흔한 실수

- 용수철이 늘어나 있다고 생각하는 것. 여기서는 $AC < 2l$이므로 용수철은 압축되어 있고 A와 C를 서로 멀어지도록 민다.
- 정지 위치를 구하려고 $V'(x) = 0$으로 두는 것. 그것은 속력이 가장 큰 평형 위치를 준다.
- 막대 아래에서 중력 위치 에너지가 **음수**임을 잊는 것. 그러면 에너지 방정식이 $(0, 1)$에서 해를 갖지 않게 된다.

STEP 너머

질량이 없는 물체에 작용하는 알짜힘이 0이어야 한다는 생각은 운동 법칙이 아니라 구속 조건(constraint)이다. 이런 문제는 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 가장 깔끔하게 다룰 수 있다. 라그랑주 역학에서는 하나의 좌표(여기서는 x)로 에너지 함수 하나를 적으면 되고, 구속력은 전혀 나타나지 않는다. 또 위치 에너지 $V(x)$는 V''를 통해 평형 위치 근처에서의 미소 진동(small oscillations)의 주기도 알려 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 에너지 방법과 미소 진동을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.