풀이

STEP I 1990, 문제 11

역학 • 포물체와 운동량

> **STEP I 1990, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q11

핵심 아이디어

이 문제는 세 단계로 이루어진다. 비행의 최고점까지 가는 평범한 포물체 운동(projectile motion), 순간적인 충돌(collision)(붙잡기), 그리고 순간적인 "폭발(explosion)"(밀어내기)이다. 순간적으로 일어나는 두 단계 동안에는 중력이 작용할 시간이 없으므로, 포탄과 슈퍼맨으로 이루어진 계의 운동량(momentum)은 각 방향에서 따로따로 보존된다. 그 뒤 포탄은 다시 포물체가 되어, 알려진 높이에서 알려진 아래 방향 속력으로 출발한다.

풀이

포탄과 슈퍼맨을 입자로 모형화하고, 공기 저항(air resistance)은 무시하며, 포탄은 수평인 지면에서 발사되어 같은 지면에 떨어진다고 하자. x축은 운동 방향의 수평 방향으로, y축은 연직 위 방향으로 잡는다.

비행의 최고점까지

포탄의 처음 속도 성분은 다음과 같다.

$$u_x = v\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}v, \qquad u_y = v\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v.$$

최고점에서 연직 방향 속도는 0이므로, 걸린 시간과 도달한 높이는

$$t_1 = \frac{u_y}{g} = \frac{\sqrt{3}\,v}{2g}, \qquad H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{3v^2}{8g}.$$

이다. 이 순간 포탄은 속력 $\frac{1}{2}v$로 수평으로 움직이고 있다.

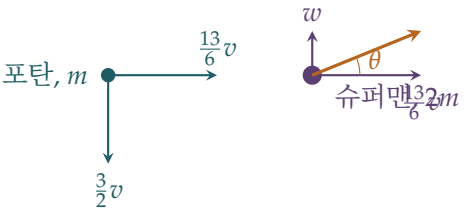
붙잡기

속력 $3v$로 수평으로 움직이던 슈퍼맨이 뒤에서 포탄을 붙잡고, 둘은 함께 움직인다. (순간적인) 붙잡기 동안 수평 방향 운동량이 보존되므로, 둘의 공통 속력을 V라 하면

$$2m(3v) + m\left(\tfrac{1}{2}v\right) = 3mV \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{13v}{6}.$$

이 순간 둘 다 연직 방향 속도가 없으므로, 합친 연직 방향 운동량은 0이다.

밀어내기



이제 슈퍼맨이 포탄을 바로 아래로 밀어낸다. 이 밀어내기는 내부 충격량(impulse)이므로, 두 물체의 전체 운동량은 두 방향 모두에서 변하지 않는다.

수평 방향: 포탄은 수평 속력 $\frac{13}{6}v$를 그대로 유지한다. 전체 수평 방향 운동량은 여전히 $3m \cdot \frac{13}{6}v$이므로, 슈퍼맨도 수평 속력 $\frac{13}{6}v$를 유지한다. (충격량이 연직 방향이므로 놀랄 일은 아니다.)

연직 방향: 전체 연직 방향 운동량이 0이었으므로, 슈퍼맨이 속력 w로 위로 움직인다고 하면

$$2m\,w - m\left(\tfrac{3}{2}v\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{3}{4}v.$$

? **생각해 보기** 중력이 내내 작용하고 있는데도 왜 운동량 보존을 쓸 수 있을까?

붙잡기와 밀어내기는 순간적으로 일어난다. 중력은 유한한 힘이므로 길이가 0인 시간 구간 동안의 충격량은 0이다. 중요한 것은 슈퍼맨과 포탄 사이에 짧은 시간 동안 작용하는 매우 큰 내력(internal force)뿐이고, 이 힘들은 쌍으로 상쇄된다.

포탄의 나머지 비행

이제 포탄은 높이 $H = \frac{3v^2}{8g}$에서 아래 방향 연직 속력 $\frac{3}{2}v$로 출발한다. 아래 방향으로 s를 재면, 포탄은 다음을 만족하는 시간 t_2 후에 지면에 닿는다.

$$\tfrac{3}{2}v\,t_2 + \tfrac{1}{2}g t_2^2 = \frac{3v^2}{8g}.$$

양변에 $8g$를 곱하면 gt_2에 대한 이차방정식(quadratic equation)을 얻는다.

$$4(gt_2)^2 + 12v(gt_2) - 3v^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad gt_2 = \frac{-12v + \sqrt{144v^2 + 48v^2}}{8} = \frac{-12 + 8\sqrt{3}}{8}\, v,$$

여기서 $t_2 > 0$이므로 양의 근을 택했다. 따라서

$$t_2 = \left(\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\right)\frac{v}{g}.$$

($\sqrt{3} \approx 1.732 > 1.5$이므로 이 값은 양수이다.) 전체 비행 시간은

$$\begin{aligned} T = t_1 + t_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{v}{g} + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{v}{g} \\ &= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}\,\frac{v}{g} \;\approx\; 1.10\,\frac{v}{g}. \end{aligned}$$

슈퍼맨의 방향

밀어낸 직후 슈퍼맨의 속도 성분은 수평 방향으로 $\frac{13}{6}v$, 위 방향으로 $\frac{3}{4}v$이다. 따라서 슈퍼맨의 궤적은 수평면 위로 각 θ를 이루며 시작하고,

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{4}v}{\frac{13}{6}v} = \frac{9}{26}, \qquad \theta = \arctan\frac{9}{26} \approx 19.09^\circ,$$

이므로 가장 가까운 도 단위로 나타낸 각은 19°이다.

검산

- 슈퍼맨이 없었다면 포탄은 시각 $2t_1 = \sqrt{3}\,v/g \approx 1.73\,v/g$에 떨어졌을 것이다. 포탄을 아래로 밀어내면 비행 시간이 짧아져야 하는데, 실제로 $T \approx 1.10\,v/g$가 더 작다.
- 질량비: 포탄의 질량은 슈퍼맨의 절반이므로, 포탄은 슈퍼맨의 연직 속력의 두 배를 반대 방향으로 얻어야 한다. 실제로 $\frac{3}{2}v = 2 \times \frac{3}{4}v$이다.
- 수치적으로, $v = 13.7$, $g = 9.81$로 두고 높이 H에서의 포탄의 낙하를 10^{-6} 간격으로 계산하면 $t_2 \approx 0.32407\,\mathrm{s}$를 얻어 $(\sqrt{3} - \frac{3}{2})v/g$와 일치하고, $T \approx 1.5335\,\mathrm{s} = 1.0981\,v/g$이다.

흔한 실수

- 붙잡기를 잊는 것: 밀어낸 뒤의 속력으로 공통 속력 $\frac{13}{6}v$ 대신 포탄 자신의 수평 속력 $\frac{1}{2}v$나 슈퍼맨의 $3v$를 쓰는 것.
- 질량을 무시하여 슈퍼맨의 위 방향 속력을 $\frac{3}{2}v$로 두는 것.
- 이차방정식의 음의 근을 택하거나, t_2를 t_1이 아니라 $2t_1$에 더하는 것.

STEP 너머

붙잡기는 완전 비탄성 충돌(perfectly inelastic collision)이고, 밀어내기는 그 반대 과정인 폭발이다. 같은 보존 법칙이 양쪽 방향으로 성립하지만, 운동 에너지(kinetic energy)는 한 쪽에서는 잃고 다른 쪽에서는 공급된다. 대학 1학년 과정에서 이는 충격력의 일반 이론, 그리고 계의 질량 중심(centre of mass)에 대한 이론이 된다. 질량 중심의 운동은 각 부분이 서로를 아무리 격렬하게 밀어내더라도 오직 외력에만 의존한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 운동량, 충격량, 질량 중심을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.