풀이

STEP I 1990, 문제 10

역학 • 일률과 저항

> **STEP I 1990, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q10

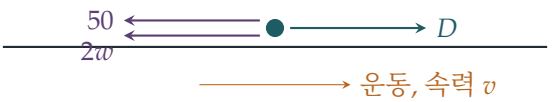
핵심 아이디어

"일정한 속력(steady speed)"이란 가속도(acceleration)가 없다는 뜻이므로, 주자의 구동력(driving force)은 저항력과 정확히 균형을 이루고, 일률(power)은 구동력과 속력의 곱이다. 유일하게 미묘한 점은 공기 저항(air resistance)이 **공기에 대한 상대** 속력에 따라 달라지며, 이 상대 속력이 갈 때와 올 때 서로 다르다는 것이다. 문제의 후반부에서는 일률보다 총에너지를 생각하라. 각 구간에서 쓰는 에너지는 저항력과 거리의 곱이며, 이를 통해 고정된 에너지 예산이 두 속력에 대한 일차 조건으로 바뀐다.

풀이

일정한 속력과 경주 시간

주자를 직선 위를 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. 한 구간에서 주자의 지면에 대한 속력을 v (단위 $\mathrm{m\,s^{-1}}$), 주자가 내는 앞쪽 방향 구동력을 D (단위 N)라 하자. 저항력은 50 N과 $2w$ N이며, 각각 지면에 대한 운동과 공기에 대한 운동을 방해한다.



트랙 방향으로 힘을 분해하면, 일정한 속력에서는 가속도가 없으므로

$$D = 50 + 2w.$$

주자가 일을 하는 비율은 구동력과 그 작용점의 속력의 곱이므로 $300 = Dv$이다.

가는 구간. 바람은 주자의 운동 방향으로 $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 분다. $v > 3$이면 주자는 공기에 대해 $w = v - 3$으로 앞으로 움직이고, 공기 저항은 뒤쪽으로 작용한다. ($v > 3$인지는 아래에서 확인한다.) 그러면 $D = 50 + 2(v-3) = 44 + 2v$이고, 양의 근을 택하면

$$v_1(44 + 2v_1) = 300 \iff v_1^2 + 22v_1 - 150 = 0 \iff v_1 = -11 + \sqrt{271} \approx 5.462,$$

이다. 이 값은 실제로 3보다 크므로 가정이 성립한다. (다른 방법: $v = 3$에서는 공기 저항이 없고 필요한 일률이 $3 \times 50 = 150 < 300\,\mathrm{W}$뿐이므로, 주자는 바람보다 빨리 달려야 한다.)

돌아오는 구간. 이제 주자는 바람을 안고 달리므로 $w = v + 3$이고 $D = 50 + 2(v+3) = 56 + 2v$이다.

$$v_2(56 + 2v_2) = 300 \iff v_2^2 + 28v_2 - 150 = 0 \iff v_2 = -14 + \sqrt{346} \approx 4.601.$$

시간. 출발과 반환점에서의 가속을 무시하면

$$T_0 = \frac{5000}{v_1} + \frac{5000}{v_2} \approx 915.4 + 1086.7 = 2002.1,$$

이므로, 경주에는 초 단위로 반올림하여 $2002\,\mathrm{s}$(약 33분 22초)가 걸린다.

다른 전략

이번에는 주자가 가는 구간에서 $x_1\,\mathrm{W}$, 돌아오는 구간에서 $x_2\,\mathrm{W}$로 일하며, 일정한 속력이 각각 v_1, v_2라 하자. 힘의 균형은 그대로이므로 $v_1 > 3$인 한

$$x_1 = v_1(44 + 2v_1), \qquad x_2 = v_2(56 + 2v_2).$$

가는 구간에 걸리는 시간은 $5000/v_1$이므로, 그 구간에서 쓰는 에너지는

$$x_1 \cdot \frac{5000}{v_1} = 5000(44 + 2v_1),$$

이다. 이는 당연히 그래야 하듯 저항력과 거리의 곱일 뿐이다. 마찬가지로 돌아오는 구간에서는 $5000(56 + 2v_2)$를 쓴다. 따라서 총에너지는

$$E = 5000(100 + 2(v_1 + v_2)).$$

? 생각해 보기 고정된 총에너지는 어디에서 쓰이는가?

주자는 원래 경주에서와 같은 총에너지를 써야 하므로 E는 고정된 수이다. E는 오직 $v_1 + v_2$를 통해서만 속력에 의존하므로, x_1과 x_2를 어떻게 고르든 이 합은

$$v_1 + v_2 = \frac{E}{10\,000} - 50,$$

로 정해진다. 이로써 결과가 증명된다. 그 값은 원래 경주에서의 값으로,

$$S = v_1 + v_2 = \sqrt{271} + \sqrt{346} - 25 \approx 10.063.$$

최선의 전략. 이제 경주 시간은

$$T = 5000\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{5000\,(v_1 + v_2)}{v_1 v_2} = \frac{5000\,S}{v_1 v_2}.$$

S가 고정되어 있으므로, 이 값은 $v_1 v_2$가 최대일 때 최소가 된다. 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해 $v_1 v_2 \le (\frac{S}{2})^2$이고, 등호는 정확히 $v_1 = v_2 = \frac{S}{2}$일 때 성립한다. 따라서 최선의 계획은 갈 때와 올 때 모두 같은 속력 $\frac{S}{2} \approx 5.032\,\mathrm{m\,s^{-1}}$로 달리는 것이다. 이 속력은 여전히 바람보다 빠르므로, 가는 구간의 x_1에 대한 공식은 그대로 유효하다. 최소 시간은

$$T_{\min} = \frac{5000\,S}{S^2/4} = \frac{20\,000}{S} \approx 1987.4\ \mathrm{s}.$$

주자는 $T_0 - T_{\min} \approx 2002.1 - 1987.4 = 14.7\,\mathrm{s}$를 절약하며, 이는 요구한 대로 약 15초이다. 이때 일률은 가는 구간에서 약 $x_1 \approx 272\,\mathrm{W}$, 돌아오는 구간에서 약 $x_2 \approx 332\,\mathrm{W}$이다. 즉 주자는 바람을 등지고 달릴 때는 힘을 늦추고, 바람을 안고 달릴 때는 더 힘을 낸다.

검산

- 에너지의 일관성: $300 \times 2002.105 \approx 600\,632\,\mathrm{J}$이고, $5000(100 + 2 \times 10.0632) \approx 600\,632\,\mathrm{J}$도 마찬가지이다.
- 바람이 없다면 두 구간 모두 $v^2 + 25v - 150 = 0$이 되어 $v = 5$이고, 두 방법은 일치한다. 절약을 가능하게 하는 것은 바람이다.
- x_1을 무작위로 1000번 골라(x_2는 에너지 예산으로 정해짐) $v_1 + v_2 = 10.0632$임을, 어떤 선택도 1987.4 s보다 빠르지 않음을, 그리고 절약되는 시간이 14.66 s임을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 공기 저항 항에 공기에 대한 상대 속력 대신 지면에 대한 속력을 쓰거나, 한 구간에서 바람의 부호를 반대로 잡는 것.
- 갈 때와 올 때 **일률**을 같게 하는 것이 공평하다고 생각하는 것. 시간을 최소로 만드는 것은 갈 때와 올 때 **속력**을 같게 하는 것이다.
- 일률에 대한 식만으로 $v_1 + v_2$가 일정함을 증명하려는 것. 고정된 총에너지가 필요하다.

STEP 너머

마지막 부분은 작은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 일차 제약 조건 아래에서 $1/v_1 + 1/v_2$를 최소화하는 것이다. 여기서는 산술-기하 평균 부등식으로 해결되지만, 대학 1학년 과정에서 배우는 일반적인 도구는 라그랑주(Lagrange) 승수법(method of Lagrange multipliers)이며, 같은 아이디어가 사이클과 조정에서의 최적 페이스 배분을 지배한다. 일, 일률, 항력에 대한 꼼꼼한 설명은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.