풀이

# STEP I 1990, 문제 1

순수수학 • 삼각함수의 최적화

> **STEP I 1990, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q1

## 핵심 아이디어

블라인드의 모든 꼭짓점은 중심 $D$로부터 거리가 $r$이므로, 반지름 $DX$와 $DY$는 사각형을 꼭지각이 $D$에 있는 세 개의 이등변삼각형(isosceles triangle)으로 나눈다. 각 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\sin$(꼭지각)이고, 세 꼭지각의 합은 $\pi$이다. 이렇게 하면 기하 문제가 사인 값들의 합을 최대화하는 문제로 바뀌고, 합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula)을 쓰면 미적분(calculus) 없이 첫 부분을 해결할 수 있다.

## 풀이

### 블라인드의 넓이

$A, D, C$가 한 직선 위에 있으므로(collinear), $D$에서의 각은 다음을 만족한다.

$$\angle ADX + \angle XDY + \angle YDC = \pi, \qquad \text{따라서} \qquad \angle YDC = \pi - \theta - \alpha.$$

여기서 $\theta \geq 0, \alpha > 0$이고 $\theta + \alpha \leq \pi$이므로, $X$와 $Y$는 호 위에 $A, X, Y, C$의 순서로 놓인다.

반지름 $DX$와 $DY$는 블라인드 $AXYC$를 삼각형 $ADX$, $XDY$, $YDC$로 나누며, 각 삼각형은 길이가 $r$인 두 변이 $D$에서 만난다. 각각에 대해 넓이 $= \frac{1}{2}ab\sin C$를 쓰면

$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \tfrac{1}{2}r^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha + \tfrac{1}{2}r^2\sin(\pi - \theta - \alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}r^2[\sin\alpha + \sin\theta + \sin(\theta + \alpha)], \end{aligned}$$

이다. $\sin(\pi - u) = \sin u$이기 때문이다.

### 고정된 $\alpha$에 대한 최적의 $\theta$

$\alpha$를 고정하면 $\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)$만 변한다. 합을 곱으로 바꾸는 공식 $\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$에 의해

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) = 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\,\sin\!\left(\theta+\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

**?** **생각해 보기** 왜 이렇게 하면 최댓값이 분명해지는가?

$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 인수 $2\cos\frac{\alpha}{2}$는 고정된 양의 상수이다. 따라서 넓이는 $\sin(\theta+\frac{\alpha}{2})$가 가장 클 때 정확히 가장 크다. $\theta$가 $[0, \pi-\alpha]$ 위를 움직이면 각 $\theta+\frac{\alpha}{2}$는 $[\frac{\alpha}{2}, \pi-\frac{\alpha}{2}]$ 위를 움직이고, 이 구간은 $\frac{\pi}{2}$를 포함한다. 그러므로 사인은 $\theta+\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$일 때 가능한 최댓값 1에 도달한다. 즉

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}.}$$

이때 $\angle YDC = \pi - \theta - \alpha = \frac{\pi-\alpha}{2} = \theta$도 성립한다. 즉 최적의 블라인드는 수직 반지름에 대하여 대칭이며, 이는 직관과도 맞아떨어진다. 이 $\alpha$에 대한 최대 넓이는

$$\tfrac{1}{2}r^2\left[\sin\alpha + 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\right].$$

### $\alpha$를 변화시키기

이제 $0 < \alpha < \pi$에서 $f(\alpha) = \sin\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2}$를 최대화한다. (각 $\alpha$에 대해 가장 큰 넓이는 $\frac{1}{2}r^2 f(\alpha)$이므로, 전체에서 가장 큰 넓이는 $f$의 최댓값에 $\frac{1}{2}r^2$를 곱한 것이다.) 미분하면

$$f'(\alpha) = \cos\alpha - \sin\tfrac{\alpha}{2}.$$

$s = \sin\frac{\alpha}{2}$로 두면 $0 < s < 1$이고, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$를 이용하면

$$f'(\alpha) = 1 - s - 2s^2 = (1-2s)(1+s).$$

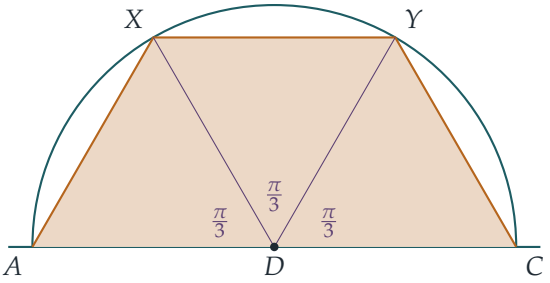
$1+s > 0$이므로 $f'$의 부호는 $1-2s$의 부호와 같다. $(0,\pi)$에서 $s$는 $\alpha$에 따라 증가하므로, $f'$는 $s < \frac{1}{2}$일 때 양수이고 $s > \frac{1}{2}$일 때 음수이다. 따라서 $f$는 증가하다가 감소하며, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, 즉 $\alpha = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값을 가진다. 이때

$$f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\tfrac{\pi}{3} + 2\cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \tfrac{3\sqrt{3}}{2},$$

이므로 블라인드의 가능한 최대 넓이는

$$\boxed{\tfrac{1}{2}r^2 \cdot \tfrac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2.}$$

이때 $\alpha = \theta = \angle YDC = \frac{\pi}{3}$이므로 세 삼각형은 정삼각형이고, 블라인드는 원 전체에 내접하는 정육각형(regular hexagon)의 절반이다.




## 검산

- 극한의 경우: $\alpha \to 0$이면 블라인드는 $X$가 꼭대기에 있는 삼각형 $AXC$가 되고, 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$이며, 실제로 $\frac{1}{2}r^2 f(0) = r^2$이다. $\alpha \to \pi$이면 블라인드는 지름 위로 납작해지고 $f(\pi) = 0$이다. 최댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 \approx 1.299r^2$은 두 경우보다 크고, 반원의 넓이 $\frac{\pi}{2}r^2 \approx 1.571r^2$보다 작으니 당연히 그래야 하는 대로이다.
- 수치적으로: $X$와 $Y$의 임의의 위치에 대해 세 삼각형 공식을 신발끈 공식(shoelace formula)과 비교하여 확인했고, 여러 $\alpha$ 값에 대해 촘촘한 격자 탐색(grid search)으로 최적의 $\theta$를 찾았으며, $r = 1$로 두고 $\theta$와 $\alpha$를 함께 탐색하면 최대 넓이가 $1.299038\ldots = \frac{3\sqrt{3}}{4}$임을 확인했다.

## 흔한 실수

- 세 번째 삼각형 $YDC$를 빠뜨리거나, 그 각을 $\pi - \theta - \alpha$가 아니라 $\pi - \alpha$로 쓰는 것.
- 두 번째 부분에서 정당화 없이 $\theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$라는 지름길을 쓰는 것. 최적의 블라인드가 정말로 정육각형의 절반임을 보이려면 미적분(또는 대칭성 논증)이 필요하다.

## STEP 너머

이 답은 고전적인 사실의 특수한 경우이다. 원에 내접하는 모든 $n$각형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 정$n$각형이다. 깔끔한 증명 하나는 $[0, \pi]$에서 sin의 오목성(concavity)과 옌센 부등식(Jensen's inequality)을 이용한다. 중심각 $\phi_1, \ldots, \phi_n$의 합이 $2\pi$이면 $\sum \sin \phi_i \leq n \sin \frac{2\pi}{n}$이다. 우리의 블라인드는 $n = 6$인 경우의 절반이다. 이런 종류의 볼록성(convexity)과 부등식은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 계속 등장하는 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이를 제대로 만나기에 좋은 책이고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에는 같은 맥락의 STEP 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.